

LUIS ROBERTO LUCINGER DE ALMEIDA

SIMETRIAS DE LIE ESTOCÁSTICAS

CAMPINAS

2012

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

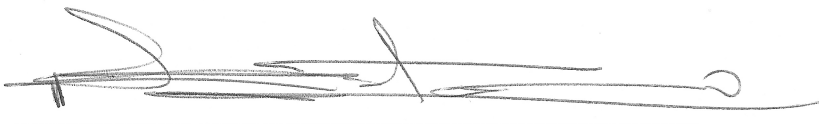
LUIS ROBERTO LUCINGER DE ALMEIDA

SIMETRIAS DE LIE ESTOCÁSTICAS

TESE DE DOUTORADO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA DA UNICAMP
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA

ORIENTADOR: PEDRO JOSÉ CATUOGNO

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO LUIS
ROBERTO LUCINGER DE ALMEIDA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. PEDRO JOSÉ CATUOGNO



ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Almeida, Luis Roberto Lucinger de, 1983-
AL64s Simetrias de Lie estocásticas / Luis Roberto Lucinger de
Almeida. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Pedro José Catuogno.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise estocástica. 2. Lie, Simetrias de. I. Catuogno,
Pedro José, 1959-. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III.
Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Stochastics Lie's symmetries

Palavras-chave em inglês:

Stochastic analysis

Lie point symmetries

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Pedro José Catuogno [Orientador]

Paulo Regis Caron Ruffino

Yuri Dimitrov Bozhkov

Ryuichi Fukuoka

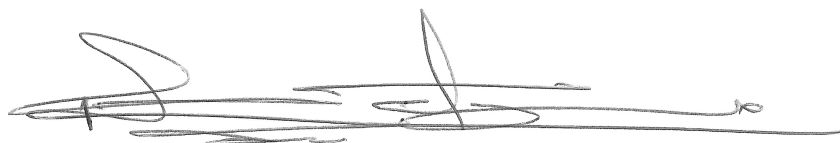
Edson Alberto Coayla Terán

Data de defesa: 13-04-2012

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 13 de abril de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO



Prof(a). Dr(a). PAULO REGIS CARON RUFFINO



Prof(a). Dr(a). YURI DIMITROV BOZHKOV



Prof(a). Dr(a). RYUICHI FUKUOKA



Prof(a). Dr(a). EDSON ALBERTO COAYLA TERÁN

Agradecimentos

À minha querida esposa Bianca, por estar sempre ao meu lado, e por me apoiar desde a graduação.

Aos meus pais e meus irmãos, pelo apoio incondicional e pelo incentivo sempre.

Ao meu orientador, professor Pedro J. Catuogno, pela paciência, amizade e orientação durante todo esse tempo.

Aos membros da banca examinadora, pelas contribuições.

Aos professores Luci H. Fatori e Olivio A. Weber, pelo encorajamento e incentivo durante a graduação.

À família Migliorini de Campos e às irmãs Elza, Isabel e Lia (e família), pela amizade e pelo carinho.

Aos vários amigos que fiz na Unicamp, por tornarem a vida mais agradável. Entre eles, destaco Adilson P., Anderson A., Ângelo B., Durval T., Eduardo N., Jamil A., João B., Juliana O., Lino G., Márcio V., Nelson L., Rafael C., Ricardo M., Rinaldo S., Thiago C., Thiago F., Thiago M., Welington A.

À secretaria de pós-graduação do Imecc, pelo ótimo serviço prestado.

À CAPES e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Muito obrigado!

Resumo

Nesta tese, estudamos equações diferenciais estocásticas, sob o ponto de vista da teoria das simetrias de Lie. Introduzimos o conceito de simetria de Lie estocástica, que consiste em uma ação que mantém invariante as soluções de uma equação diferencial, onde tal ação é estocástica, isto é, dada por um fluxo estocástico. Nosso principal resultado consiste nas equações de Lie para as simetrias estocásticas, permitindo detectar quando um fluxo estocástico é uma simetria estocástica. Além disso, apresentamos uma possível definição de coordenada canônica para as simetrias estocásticas e obtemos condições, assim como no caso clássico, para encontrá-la. Por fim, mostramos como obter, sistematicamente, transformações entre equações estocásticas.

Abstract

In this thesis, we study stochastic differential equations, under the point of view of Lie point symmetries. We introduce the concept of stochastic Lie point symmetry, which consists of an action that keeps invariant the solutions of a differential equation, where such action is stochastic, i.e., given by a stochastic flow. Our main result is the Lie's equations for stochastic symmetries, which allows one to detect when a stochastic flow is a stochastic symmetry. Furthermore, we present a possible definition of canonical coordinates for the stochastic symmetries and we obtain conditions, like in the standard case, to find them. At last, we show how to obtain, systematically, transformations between stochastic differential equations.

Índice

Introdução	1
1 Cálculo estocástico	7
1.1 Noções Básicas	7
1.2 Mudança aleatória no tempo	11
2 Simetrias de Lie	13
2.1 Simetrias de equações determinísticas	13
2.2 Simetrias de equações estocásticas	20
2.3 Transformações entre equações diferenciais	29
3 Simetria estocástica	33
3.1 Simetria estocástica	33
3.2 Coordenadas canônicas	49
3.2.1 Caso 1: Simetrias clássicas	49
3.2.2 Caso 2: Simetrias estocásticas	53
3.3 Transformações entre equações estocásticas	58
Referências	63

Introdução

Uma simetria de uma equação diferencial é uma ação à 1-parâmetro, no espaço das variáveis dependentes e independentes da equação, que deixa invariante as soluções de tal equação. Em outras palavras, é uma ação que leva qualquer solução, em uma outra solução da mesma equação diferencial.

Quando uma equação diferencial admite uma simetria, é possível reduzir a ordem de tal equação. Logo, dependendo de quantas simetrias uma dada equação diferencial possui, e dependendo da ordem da equação, é possível obter uma solução explícita desta equação diferencial. Essa é uma das grandes utilidades da teoria das simetrias de Lie, aplicada às equações diferenciais, sendo uma das poucas que permite obter soluções explícitas de equações diferenciais. Por exemplo, o método dos fatores integrantes, aplicado à equações diferenciais ordinárias (EDOs) lineares de primeira ordem, que é um dos primeiros métodos visto num curso introdutório de equações diferenciais, pode ser obtido através da teoria das simetrias de Lie (ver [2], Seção 3.2).

O primeiro passo, e talvez o mais importante, na tentativa de estudar equações diferenciais segundo suas simetrias, é determinar quais são as simetrias da equação. Isto é, determinar quais ações mantêm invariante as soluções dessa equação.

Toda ação à 1-parâmetro, numa variedade diferenciável Z , pode ser considerada (pelo menos localmente) como a ação de um fluxo, associado à um campo de vetores, em Z . O espaço Z , para nosso propósito, é um produto cartesiano $Z = U \times V$, onde U é o espaço das variáveis independentes e V é o espaço das variáveis dependentes de uma dada

equação diferencial. Logo, um campo de vetores em Z tem a forma

$$\mathbf{X} = \tau(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \phi(u, v) \frac{\partial}{\partial v},$$

onde $\tau : U \times V \rightarrow U$ e $\phi : U \times V \rightarrow V$ são funções suficientemente diferenciáveis. Denotamos o fluxo associado ao campo \mathbf{X} por

$$\Phi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(u, v) = (u, v) + \int_0^\varepsilon (\tau(\Phi_r(u, v)), \phi(\Phi_r(u, v))) dr.$$

Nessa notação, toda ação à 1-parâmetro em Z pode ser pensada como sendo a ação

$$(u, v) \longmapsto \Phi_\varepsilon(u, v), \quad \varepsilon \geq 0.$$

No fim do século XIX, S. Lie ([15], ver também [2], [19] e [22]) obteve condições necessárias e suficientes, em termos das funções τ e ϕ (as componentes do campo \mathbf{X}), para se determinar quando a perturbação dada pelo fluxo Φ_ε , associado ao campo \mathbf{X} , é uma simetria de uma equação diferencial. Tais condições são conhecidas hoje como *equações de Lie* ou “*determining equations*” (veja Seção 2.1).

Vale ressaltar, que foi a teoria das simetrias de Lie que deu início à teoria de grupos e álgebras de Lie, que é uma área central da matemática moderna. O conjunto de todos os campos de vetores, que geram simetrias de uma determinada equação diferencial, forma uma álgebra, que é conhecida como álgebra de Lie. Além disso, o conjunto de todos os fluxos associados à tais campos gera um grupo contínuo à r -parâmetros, que é conhecido como grupo de Lie.

Recentemente, com os trabalhos de T. Misawa ([16], 1994) S. Albeverio e S-M. Fei ([1], 1995), iniciou-se o estudo de equações diferenciais estocásticas (EDEs) através do método das simetrias de Lie. Ambos trabalharam com equações estocásticas no sentido de Stratonovich. O primeiro trabalho que trata de EDEs no sentido de Itô é de G. Gaeta e N. Quintero ([8], 1999), que, além de obter as equações de Lie, faz uma comparação das simetrias das EDEs com as simetrias da equação de Fokker–Plank associada. Na sequência, aparecem mais trabalhos, como C. Wafo Soh e F. Mahomed ([24], 2001), G.

Ünal ([23], 2003), B. Srihirun, S. Meleshko e E. Schulz ([21], 2006), E. Fredericks e F. Mahomed ([5], 2007 e [6], 2008), entre outros, como [7], [9], [10], [11], [12], [13] e [14].

A definição de simetria de uma EDE é a mesma de uma simetria de uma equação determinística. Trata-se de uma ação à 1-parâmetro que mantém invariante as soluções da EDE. No caso da ação dada por um fluxo Φ_ε agindo no espaço $U \times V$, das variáveis independentes e dependentes, é possível obter as equações de Lie, para EDEs (veja Seção 2.2). Isto significa que sabemos quando uma perturbação do tipo

$$(u, v) \longmapsto \Phi_\varepsilon(u, v) = (u, v) + \int_0^\varepsilon (\tau(\Phi_r(u, v)), \phi(\Phi_r(u, v))) dr$$

é uma simetria de uma EDE. Note que a perturbação acima, é dada pela ação de um fluxo determinístico no espaço $U \times V$. Analisando dessa maneira, a teoria clássica das simetrias de Lie, permite responder quando uma perturbação determinística é uma simetria de uma equação diferencial determinística. Por outro lado, a teoria das simetrias de Lie aplicada às EDEs, permite responder quando uma perturbação determinística é uma simetria de uma equação diferencial estocástica. Então, cabe aqui a seguinte pergunta: o que acontece se fizermos uma perturbação estocástica em uma equação diferencial?

Nossa contribuição nessa teoria foi obter a resposta dessa pergunta, no caso de equações ordinárias. De maneira mais precisa, entendemos por perturbação estocástica uma ação dada por

$$\begin{aligned} (u, v) \longmapsto \Phi_\varepsilon(u, v) = & (u, v) + \int_0^\varepsilon (\tau(\Phi_r(u, v)), \phi(\Phi_r(u, v))) dr \\ & + \int_0^\varepsilon (\tau(\Phi_r(u, v)), \phi(\Phi_r(u, v))) dB(r), \end{aligned}$$

onde B é um movimento Browniano. Primeiramente, introduzimos o conceito de simetria estocástica, que trata-se de uma perturbação estocástica que mantém invariante as soluções de uma dada equação diferencial. Na sequência, provamos (veja Teorema 3.1.4) quando uma perturbação estocástica é uma simetria de uma equação ordinária, seja a equação estocástica ou determinística. Isto é, obtemos as equações de Lie para simetrias estocásticas, no caso de equações ordinárias.

Em seguida, tentamos estender o conceito de coordenadas canônicas para as simetrias estocásticas. Dizemos que um sistema de coordenadas é uma coordenada canônica, para um campo de vetores, quando a ação do fluxo associado ao campo é uma translação na variável espacial desse sistema de coordenadas. Um dos problemas estudados aqui é o seguinte: dado um campo de vetores num sistema de coordenadas, encontrar uma mudança de variáveis tal que, o novo sistema de coordenadas seja uma coordenada canônica para tal campo. Uma vez encontrada uma coordenada canônica, podemos resolver a equação diferencial em questão, nas novas variáveis, o que fornece, implicitamente, uma solução para a equação inicial. Primeiramente, aplicamos esse método para encontrar soluções explícitas de algumas EDEs. Depois, fornecemos uma possível definição de coordenada canônica para simetrias estocásticas, e mostramos como usar isso para resolver equações.

Outro assunto que estudamos, ainda no contexto de simetrias, foi o método introduzido por G. Bluman et al. ([3], ver também Seção 2.3). Tal método permite obter, de maneira sistemática, transformações entre equações diferenciais, ou seja, aplicações que levem toda solução de uma equação diferencial dada, em uma solução de uma equação alvo. O cenário padrão onde se aplica essa teoria é o seguinte: Temos em mãos uma equação diferencial (A), que gostaríamos de resolver explicitamente, e temos também uma outra equação diferencial (B), cuja solução é previamente conhecida, que chamamos de equação alvo. Como a solução de (B) é conhecida, se obtermos uma aplicação μ , que leve soluções de (A) em soluções de (B), podemos obter uma solução de (A), invertendo a aplicação μ . G. Bluman et al. obtiveram condições necessárias para se determinar a aplicação μ , caso ela exista. Tais condições são um sistema de equações diferenciais parciais para μ , envolvendo os geradores infinitesimais das simetrias de (A) e de (B). Um simples exemplo desta teoria, é de permitir obter, sistematicamente, a transformação de Hopf-Cole, que transforma a equação do calor na equação de Burgers (ver Seção 2.3).

Aqui, nossa contribuição foi estender a teoria de G. Bluman et al. para equações estocásticas ordinárias (ver Teorema 3.3.1). Com isso, obtivemos condições necessárias

para se obter uma aplicação que leve uma equação estocástica em outra, partindo das simetrias das mesmas.

Esta tese está organizada como segue:

No primeiro capítulo, relembramos alguns conceitos do cálculo estocástico, necessários para tratar de EDEs. Basicamente, mencionamos a integração estocástica, e da fórmula de Itô. Na Seção 1.2, relembramos a fórmula da mudança aleatória no tempo de B. Oksendal ([17], [18]), que nos diz como um processo estocástico é alterado, através de uma mudança temporal.

O Capítulo 2 trata da teoria das simetrias de Lie. Na Seção 2.1, apresentamos a teoria clássica, iniciada por S. Lie ([15], ver também [2], [19] e [22]). A maneira usual de demonstrar as equações de Lie, é através de prolongamento de campos de vetores (ver [19]). Entretanto, nós obtemos as equações de Lie de uma maneira diferente, que é a mesma maneira utilizada para as equações de Lie para simetrias estocásticas, pois, não é bem definido o que é um prolongamento de um campo de vetores que gera um fluxo estocástico. Na Seção 2.2, apresentamos a teoria das simetrias de Lie, aplicada às EDEs, obtendo as equações de Lie para EDEs, e ilustrando com alguns exemplos. Por fim, na Seção 2.3, apresentamos a teoria de G. Bluman et al. ([3]), que permite obter transformações entre equações diferenciais determinísticas.

No Capítulo 3 encontra-se a parte principal desta tese (a dizer, Teorema 3.1.4 e Teorema 3.3.1). Na Seção 3.1, introduzimos a simetria estocástica, que trata-se de uma ação dada por um fluxo estocástico, que mantém invariante soluções de uma dada equação diferencial. Em seguida, obtemos as equações de Lie para tal simetria (Teorema 3.1.4), e finalizamos com alguns exemplos de simetrias estocásticas. A Seção 3.2 se divide em duas subseções. Na primeira, relembramos o conceito de coordenadas canônicas, e aplicamos esse método, obtendo soluções de algumas EDEs. Na segunda subseção, introduzimos uma possível definição de coordenadas canônicas, para as simetrias estocásticas, e mostramos como usá-la. Na Seção 3.3, estendemos o método de G. Bluman et al. ([3], ver também Seção 2.3) para EDOs estocásticas, o que permite encontrar transformações entre equações

estocásticas. Em [11], R. Kozlov classifica todas EDOs estocásticas em \mathbb{R} , de acordo com suas simetrias. O autor faz isso através de transformações entre EDEs. Porém, não é mostrado como obter tais transformações. Como exemplo da teoria que introduzimos nessa seção, mostramos como obter, sistematicamente, as transformações presentes em [11].

Capítulo 1

Cálculo estocástico

O objetivo deste capítulo é introduzir algumas noções do cálculo estocástico e também algumas notações. Apresentamos aqui, os conceitos necessários para estudar as equações diferenciais estocásticas (EDEs), e suas simetrias, sem nos preocuparmos com demonstrações. As demonstrações dos resultados enunciados e as definições aqui presentes podem ser encontradas em [17] e [20].

1.1 Noções Básicas

A terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ denota um espaço de probabilidade. Aqui, Ω é um conjunto, \mathcal{F} é uma σ -álgebra e \mathbb{P} é uma medida de probabilidade. Uma filtração é uma família de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ se $t \leq s$.

Uma variável aleatória (à valores em \mathbb{R}^n) é uma função mensurável, com relação à σ -álgebra de Borel, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias $\{X(t)\}_{t \geq 0}$. Dizemos que um processo estocástico é adaptado (à filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$) se $X(t)$ é \mathcal{F}_t -mensurável, para cada $t \geq 0$.

As trajetórias de um processo estocástico $X = X(t, \omega)$ são as aplicações $X(\cdot, \omega) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, para cada $\omega \in \Omega$. Dizemos que um processo é contínuo quando suas

trajetórias são contínuas quase certamente com relação a medida \mathbb{P} (isto é, \mathbb{P} -q.t.p.).

Denotamos por $\mathbb{E}[\cdot]$ a esperança associada à probabilidade \mathbb{P} , ou seja, a esperança de uma variável aleatória X é dada por $\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$. Além disso, denotamos por $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_t]$ a esperança condicional com relação à \mathcal{F}_t .

Entre os processos estocásticos, um merece maior destaque.

Definição 1.1.1 *Um processo estocástico $B = B(t)$ é chamado de movimento Browniano (em \mathbb{R}^m), quando*

1. $B(0) = 0$;
2. B é um processo contínuo;
3. Os incrementos $B(t) - B(s)$, $t > s$, são independentes;
4. Cada incremento $B(t) - B(s)$, $t > s$, é uma variável aleatória Gaussiana, com média 0 e variância $(t - s)I$, onde I é a matriz identidade $m \times m$.

Seja \mathcal{P} um conjunto de partições $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots\}$ tal que $t_k \rightarrow +\infty$. Dada $\pi \in \mathcal{P}$, denotamos por $|\pi| = \sup_{k \geq 0} |t_{k+1} - t_k|$ e, como é usual, denotamos por $t \wedge s = \min\{t, s\}$.

Definição 1.1.2 *Seja X um processo estocástico contínuo e adaptado. Definimos a integral estocástica (ou integral de Itô) de X com relação à um movimento Browniano B por*

$$\int_0^t X(s) dB(s) = \lim_{\substack{|\pi| \rightarrow 0 \\ \pi \in \mathcal{P}}} \sum_{k=0}^{+\infty} X(t_k) (B(t \wedge t_{k+1}) - B(t \wedge t_k)).$$

Observação 1.1.3

1. O limite acima é em medida (probabilidade), e tal limite existe.

2. Definimos acima, a integral de um processo contínuo e adaptado, com relação à um movimento Browniano. Entretanto, a definição de integral estocástica vai mais longe do que isso, podendo integrar mais processos, e com relação a mais do que apenas o movimento Browniano. Para o propósito deste trabalho, a definição acima é suficiente. Em [20] pode ser encontrada a integral estocástica de processos previsíveis, em algum espaço L^2 , com relação à semimartingales.
3. Daqui pra frente, a menos que seja mencionado o contrário, todo processo é contínuo e adaptado.

A variação quadrática de um processo $X = X(t)$ e um processo $Y = Y(t)$ é dada por

$$\langle X, Y \rangle(t) = \lim_{\substack{|\pi| \rightarrow 0 \\ \pi \in \mathcal{P}}} \sum_{k=0}^{+\infty} (X(t \wedge t_{k+1}) - X(t \wedge t_k)) (Y(t \wedge t_{k+1}) - Y(t \wedge t_k)).$$

Dado $t \geq 0$, denotamos por Π_t o conjunto de todas as partições finitas $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t\}$ do intervalo $[0, t]$. Dizemos que um processo $X = X(t)$ é de variação limitada, quando, para todo $t \geq 0$,

$$\sup_{\pi \in \Pi_t} \sum_{k=0}^{m-1} |X(t_{k+1}) - X(t_k)| < +\infty.$$

Sejam X e Y processos. Algumas propriedades da variação quadrática que utilizaremos ao longo deste trabalho são:

1. $\langle X, Y \rangle$ é um processo de variação limitada.
2. Se X é de variação limitada e Y é contínuo, então $\langle X, Y \rangle(t) = 0$, para todo $t \geq 0$.
3. $\langle \int_0^\cdot X(s)dB(s), \int_0^\cdot Y(s)dB(s) \rangle(t) = \int_0^t X(s)Y(s)ds$.
4. $\langle B^i, B^j \rangle(t) = \delta_{ij}t$.

Uma das ferramentas mais poderosas do cálculo estocástico, é a fórmula de Itô.

Teorema 1.1.4 *Seja $F : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 , e seja $X = X(t)$ um processo estocástico. Então*

$$\begin{aligned} F(t, X(t)) &= F(0, X(0)) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, X(s)) ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x^i}(s, X(s)) dX^i(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(s, X(s)) d\langle X^i, X^j \rangle(s). \end{aligned}$$

Observação 1.1.5 Se X fosse um processo de variação limitada, seguiria do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) que

$$F(t, X(t)) = F(0, X(0)) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, X(s)) ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x^i}(s, X(s)) \frac{dX^i}{dt}(s) ds,$$

pois, nesse caso, a variação quadrática $\langle X, X \rangle$ é nula. Ao tentar obter uma fórmula similar ao TFC, só que para processos com variação quadrática não-nula, tem-se um termo adicional, que é a integral da segunda derivada com relação à variação quadrática. Note que a fórmula de Itô é uma igualdade caminho a caminho, isto é, vale para cada $\omega \in \Omega$. Assim, o termo adicional aparece naturalmente quando fixamos $\omega \in \Omega$ e utilizamos a fórmula de Taylor até segunda ordem em $F(t, X(t)) - F(0, X(0))$ (mais detalhes em [17], Capítulo 4 ou [20], Seção 3.7).

Corolário 1.1.6 *Sejam X e Y processos estocásticos. Então*

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + d\langle X, Y \rangle(t).$$

Demonstração: Basta considerar $F : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(t, x, y) = xy$. \square

A definição da integral estocástica nos permite considerar equações diferenciais estocásticas (EDEs). Dizemos que um processo $X = X(t)$ é uma solução (forte), até um tempo de parada T (ver [17], Seção 7.2 ou [20], Seção 1.1), de uma EDE

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t),$$

se

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dB(s), \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Aqui, $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, B é um movimento Browniano em \mathbb{R}^m e, para cada $(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, $g(t, x) \in M_{n \times m}(\mathbb{R}) = \{\text{matrizes } n \times m \text{ com entradas reais}\}$.

Corolário 1.1.7 *Quando o processo $X = X(t)$ é solução de uma EDE*

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t),$$

o diferencial de sua variação quadrática é dado por

$$d \langle X, X \rangle (t) = g(t, X(t))g(t, X(t))^T dt,$$

onde $g(t, x)^T$ denota a matriz transposta. Nesse caso, a fórmula de Itô se escreve como

$$\begin{aligned} F(t, X(t)) &= F(0, X(0)) + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x^i} f^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} (gg^T)_{ij} \right) (s, X(s)) ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} g_{ik} \right) (s, X(s)) dB^k(s). \end{aligned}$$

Observação 1.1.8 Para uma notação menos carregada, usamos

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial x} f \right) (s, X(s)) ds &= \sum_{i=1}^n \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} f^i \right) (s, X(s)) ds \\ \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial x} g \right) (s, X(s)) dB(s) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} g_{ik} \right) (s, X(s)) dB^k(s) \\ \int_0^t \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (gg^T) \right) (s, X(s)) ds &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} (gg^T)_{ij} \right) (s, X(s)) ds. \end{aligned}$$

1.2 Mudança aleatória no tempo

Nesta seção, apresentamos a fórmula da mudança temporal de B. Oksendal. Mais detalhes podem ser obtidos em [17], Seção 8.5, ou em [18].

Dado um processo adaptado $\eta = \eta(t, \omega)$, definimos por

$$\beta(t, \omega) = \int_0^t \eta(s, \omega)^2 ds$$

uma mudança (aleatória) no tempo, com taxa de mudança $\eta(t, \omega)^2$. Observe que $\beta(t, \omega)$ é adaptado e possui trajetórias não-decrescentes. Definimos

$$\alpha(t) = \alpha(t, \omega) = \inf\{s \geq 0; \beta(s, \omega) > t\}.$$

Segue que α é uma inversa à direita de β , para cada ω . No caso em que $\eta(t, \omega) \neq 0$, q.t.p. $(t, \omega) \in [0, +\infty) \times \Omega$, tem-se que α é uma inversa de β . Nesse caso, $\beta(\alpha(t, \omega), \omega) = t = \alpha(\beta(t, \omega), \omega)$. A menos que seja ressaltado, estamos considerando sempre o caso $\eta \neq 0$.

Teorema 1.2.1 *Seja $B = B(t)$ um movimento Browniano, e seja $t \mapsto \bar{t} = \beta(t, \omega)$ uma mudança temporal, com taxa $\eta(t, \omega)^2$ como acima. Então*

1. $\bar{B}(t) = \int_0^{\alpha(t)} \eta(s, \omega) dB(s)$ é um movimento Browniano;
2. $\int_0^{\alpha(t)} v(s, \omega) dB(s) = \int_0^t v(\alpha(s), \omega) \frac{1}{\eta(\alpha(s), \omega)} d\bar{B}(s)$, para todo processo integrável v .

Demonstração: Ver [17], Seção 8.5 ou [18]. □

Capítulo 2

Simetrias de Lie

Neste capítulo, introduzimos a teoria das simetrias de Lie para equações diferenciais. Na primeira seção, tratamos da teoria clássica, que foi estudada inicialmente por S. Lie ([15]). Algumas referências clássicas (e mais recentes) sobre esse assunto são [2], [19] e [22]. Na segunda seção, apresentamos alguns resultados mais recentes, que tratam de simetrias de equações estocásticas (ver [1], [8], [21] e [24]). Por fim, na seção 2.3, ilustramos como funciona a teoria desenvolvida por G. Bluman et al. em [3], que fornece uma maneira de transformar uma equação diferencial em outra, através das simetrias das mesmas.

2.1 Simetrias de equações determinísticas

O objetivo desta seção é de apresentar a teoria clássica das simetrias de Lie, introduzida por S. Lie, em [15]. A teoria das simetrias de Lie pode ser aplicada até mesmo à sistemas de equações diferenciais parciais (ver [19], [22] e [2], entre outros). Entretanto, nesta tese, estudamos simetrias de equações diferenciais estocásticas ordinárias. Por essa razão, nos restringiremos às equações ordinárias.

Uma simetria de uma equação diferencial, é uma ação a 1-parâmetro no espaço das variáveis dependentes e independentes, que deixa invariante as soluções da equação, isto

é, a ação leva qualquer solução dada em outra solução (da mesma equação).

Toda ação a 1-parâmetro pode ser considerada (ao menos localmente) como a ação de um fluxo, associado à um campo de vetores no produto cartesiano das variáveis dependentes e independentes. Um dos feitos de S. Lie, foi de obter condições para se determinar quando a ação de um fluxo é uma simetria de uma dada equação diferencial. Tais condições são dadas sobre as componentes desses campos de vetores, isto é, sobre os geradores infinitesimais dos fluxos.

Seja

$$dX(t) = f(t, X(t))dt \quad (2.1.1)$$

uma EDO, com $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Considere um campo de vetores

$$\mathbf{X} = \tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.1.2)$$

no espaço $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, onde $\phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \phi^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i}$, com fluxo associado

$$\Phi_\varepsilon(t, x) = (t, x) + \int_0^\varepsilon (\tau(\Phi_r(t, x)), \phi(\Phi_r(t, x))) dr. \quad (2.1.3)$$

A teoria de Lie fornece condições, sobre as funções τ e ϕ , para se determinar quando a ação $(t, x) \mapsto \Phi_\varepsilon(t, x)$ é uma simetria de (2.1.1).

Se denotarmos a ação do fluxo por

$$\begin{aligned} t &\longmapsto \bar{t} = \Phi_\varepsilon^1(t, x) = t + \int_0^\varepsilon \tau(\Phi_r(t, x)) dr \\ x &\longmapsto \bar{x} = \Phi_\varepsilon^2(t, x) = x + \int_0^\varepsilon \phi(\Phi_r(t, x)) dr, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

temos a seguinte definição de simetria

Definição 2.1.1 *O campo de vetores (2.1.2) (ou seu fluxo associado) é uma simetria da EDO (2.1.1) se, para toda solução $X = X(t)$ de (2.1.1), tivermos que $\bar{X} = \bar{X}(\bar{t})$ é uma solução de (2.1.1), onde $\bar{X}(\bar{t})$ denota a perturbação da solução $X(t)$ pelo fluxo.*

Em outras palavras, o campo (2.1.2) é uma simetria da EDO (2.1.1) quando

$$dX(t) = f(t, X(t))dt$$

implica

$$d\bar{X}(\bar{t}) = f(\bar{t}, \bar{X}(\bar{t}))d\bar{t}.$$

O resultado abaixo, é um dos mais importantes na teoria das simetrias de Lie. É ele que fornece as equações que determinam se um campo é uma simetria. Tais equações são conhecidas como *equações de Lie*, ou “*determining equations*”.

Teorema 2.1.2 *Se um campo de vetores $\mathbf{X} = \tau(t, x)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x)\frac{\partial}{\partial x}$ é uma simetria da EDO*

$$dX(t) = f(t, X(t))dt, \quad (2.1.5)$$

então

$$f_t\tau + f_x\phi + f\tau_t + f\tau_x f = \phi_t + \phi_x f. \quad (2.1.6)$$

Observação 2.1.3

1. Note que (2.1.6) é uma igualdade em \mathbb{R}^n , e significa que, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$\frac{\partial f^i}{\partial t}\tau + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\phi^j + f^i \frac{\partial \tau}{\partial t} + f^i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \tau}{\partial x^j} f^j \right) = \frac{\partial \phi^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j} f^j.$$

2. A demonstração usual deste teorema (veja [2], [19] e [22]), consiste em obter o prolongamento do campo \mathbf{X} , usando o conceito da derivada total. Daremos aqui uma demonstração diferente, baseada na demonstração das equações de Lie para as simetrias estocásticas (ver Teorema 3.1.4).

Demonstração: Suponha $n = 1$. A ação que tal campo \mathbf{X} produz no espaço $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ é dada em (2.1.4). Seja $X = X(t)$ uma solução de (2.1.5). A ação do fluxo associado à \mathbf{X} na solução é dada por

$$X(t) \mapsto \bar{X}(\bar{t}) = \Phi_\varepsilon^2(\alpha_\varepsilon(\bar{t}), X(\alpha_\varepsilon(\bar{t}))) = \Phi_\varepsilon^2(t, X(t)),$$

onde $\alpha = \alpha_\varepsilon(t, x)$ é uma inversa de $\bar{t} = \Phi_\varepsilon^1(t, x)$, na variável t . Note que α existe (pelo menos numa vizinhança de $\varepsilon = 0$), pois, de (2.1.4), $\left. \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} \right|_{\varepsilon=0} = 1 > 0$.

Como

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{X}(\bar{t}) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_\varepsilon^2(t, X(t)) = \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} \frac{dX(t)}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t)),$$

segue do teorema fundamental do cálculo que

$$\bar{X}(\bar{t}) = \bar{X}(0) + \int_0^{\bar{t}} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} f \right) (s, X(s)) ds.$$

Efetuada uma mudança de variáveis, temos que

$$\bar{X}(\bar{t}) = \bar{X}(0) + \int_0^{\bar{t}} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} f \right) (\alpha_\varepsilon(s), X(\alpha_\varepsilon(s))) \left[\left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial x} f \right) (s, X(s)) \right]^{-1} ds. \quad (2.1.7)$$

Por outro lado, como $X = X(t)$ é uma solução de (2.1.5), segue que sua perturbação pelo fluxo Φ_ε também é. Isso significa que

$$\bar{X}(\bar{t}) = \bar{X}(0) + \int_0^{\bar{t}} f(s, \bar{X}(s)) ds. \quad (2.1.8)$$

Comparando as equações (2.1.7) e (2.1.8), obtemos

$$\left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} f \right) (t, X(t)) \left[\left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial x} f \right) (\bar{t}, \bar{X}(\bar{t})) \right]^{-1} = f(\bar{t}, \bar{X}(\bar{t})),$$

ou seja,

$$\left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} f \right) (t, X(t)) = f \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial x} f \right) (\Phi_\varepsilon^1(t, X(t)), \Phi_\varepsilon^2(t, X(t))). \quad (2.1.9)$$

Em outras palavras, o campo \mathbf{X} é uma simetria de (2.1.5) se, e somente se, a equação (2.1.9) é verificada para todo $\varepsilon \geq 0$. Para obter as equações de Lie (2.1.6), que são condições infinitesimais, o que fazemos é calcular a derivada da equação (2.1.9), com relação à ε , e avaliar o resultado em $\varepsilon = 0$. Derivando (2.1.9), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial \varepsilon \partial t} + \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial \varepsilon \partial x} f &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial \varepsilon} \right) \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial x} f \right) \\ &+ f \left(\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^1}{\partial \varepsilon \partial t} + \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^1}{\partial t^2} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^1}{\partial x \partial t} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial \varepsilon} \right) \\ &+ f \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^1}{\partial \varepsilon \partial x} + \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^1}{\partial t \partial x} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^1}{\partial x^2} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial \varepsilon} \right) f \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial \varepsilon} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

No que segue, calculamos as derivadas das componentes do fluxo Φ_ε , presentes na equação (2.1.10). Faremos isso utilizando as equações em (2.1.4).

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial \varepsilon}(t, X(t)) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ t + \int_0^\varepsilon \tau(\Phi_r(t, x)) dr \right\} \Big|_{x=X(t)} \\
&= \tau(\Phi_\varepsilon(t, X(t))). \\
\bullet \quad \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial t}(t, X(t)) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ t + \int_0^\varepsilon \tau(\Phi_r(t, x)) dr \right\} \Big|_{x=X(t)} \\
&= 1 + \int_0^\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} [\tau(\Phi_r(t, x))] dr \Big|_{x=X(t)} \\
\bullet \quad \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial x}(t, X(t)) &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ t + \int_0^\varepsilon \tau(\Phi_r(t, x)) dr \right\} \Big|_{x=X(t)} \\
&= 0 + \int_0^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} [\tau(\Phi_r(t, x))] dr \Big|_{x=X(t)} \\
\bullet \quad \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^1}{\partial t^2}(t, X(t)) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ t + \int_0^\varepsilon \tau(\Phi_r(t, x)) dr \right\} \Big|_{x=X(t)} \\
&= 0 + \int_0^\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\tau(\Phi_r(t, x))] dr \Big|_{x=X(t)} \\
\bullet \quad \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^1}{\partial x^2}(t, X(t)) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ t + \int_0^\varepsilon \tau(\Phi_r(t, x)) dr \right\} \Big|_{x=X(t)} \\
&= 0 + \int_0^\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\tau(\Phi_r(t, x))] dr \Big|_{x=X(t)} \\
\bullet \quad \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^1}{\partial x \partial t}(t, X(t)) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left\{ t + \int_0^\varepsilon \tau(\Phi_r(t, x)) dr \right\} \Big|_{x=X(t)} \\
&= 0 + \int_0^\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} [\tau(\Phi_r(t, x))] dr \Big|_{x=X(t)} \\
\bullet \quad \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^1}{\partial \varepsilon \partial t}(t, X(t)) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[t + \int_0^\varepsilon \tau(\Phi_r(t, x)) dr \right] \right\} \Big|_{x=X(t)} \\
&= \frac{\partial \tau}{\partial t}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial \tau}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t}(t, X(t)).
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^1}{\partial \varepsilon \partial x}(t, X(t)) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[t + \int_0^\varepsilon \tau(\Phi_r(t, x)) dr \right] \right\} \Big|_{x=X(t)} \\ &= \frac{\partial \tau}{\partial t}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial x}(t, X(t)) + \frac{\partial \tau}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x}(t, X(t)).\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial \varepsilon}(t, X(t)) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ x + \int_0^\varepsilon \phi(\Phi_r(t, x)) dr \right\} \Big|_{x=X(t)} \\ &= \phi(\Phi_\varepsilon(t, X(t))).\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t}(t, X(t)) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ x + \int_0^\varepsilon \phi(\Phi_r(t, x)) dr \right\} \Big|_{x=X(t)} \\ &= 0 + \int_0^\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} [\phi(\Phi_r(t, x))] dr \Big|_{x=X(t)}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x}(t, X(t)) &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x + \int_0^\varepsilon \phi(\Phi_r(t, x)) dr \right\} \Big|_{x=X(t)} \\ &= 1 + \int_0^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} [\phi(\Phi_r(t, x))] dr \Big|_{x=X(t)}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial \varepsilon \partial t}(t, X(t)) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[x + \int_0^\varepsilon \phi(\Phi_r(t, x)) dr \right] \right\} \Big|_{x=X(t)} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t}(t, X(t)).\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial \varepsilon \partial x}(t, X(t)) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[x + \int_0^\varepsilon \phi(\Phi_r(t, x)) dr \right] \right\} \Big|_{x=X(t)} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial x}(t, X(t)) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x}(t, X(t)).\end{aligned}$$

Com essas igualdades em mãos, obtemos o seguinte fazendo $\varepsilon = 0$ em (2.1.10):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} f &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} \tau + \frac{\partial f}{\partial x} \phi \right) (1 + 0 \cdot f) \\ &\quad + f \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + 0 \cdot \tau + 0 \cdot \phi \right) \\ &\quad + f [(0 + 0 \cdot \tau + 0 \cdot \phi) f \\ &\quad \quad + 0 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \tau + \frac{\partial f}{\partial x} \phi \right)].\end{aligned}$$

Isso finaliza a prova do teorema, quando $n = 1$.

Para n qualquer, a equação (2.1.9) fica

$$\left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} + J\Phi_\varepsilon^2 f \right) (t, X(t)) = f \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial t} + \nabla \Phi_\varepsilon^1 f \right) (\Phi_\varepsilon^1(t, X(t)), \Phi_\varepsilon^2(t, X(t))),$$

onde

$$J\Phi_\varepsilon^2 = \left(\frac{\partial(\Phi_\varepsilon^2)^i}{\partial x^j} \right)_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

e

$$\nabla \Phi_\varepsilon^1 = \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial x^i} \right)_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Isso significa que, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$\left(\frac{\partial(\Phi_\varepsilon^2)^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\Phi_\varepsilon^2)^i}{\partial x^j} f^j \right) (t, X(t)) = f^i \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial x^j} f^j \right) (\Phi_\varepsilon^1(t, X(t)), \Phi_\varepsilon^2(t, X(t))). \quad (2.1.11)$$

Logo, para concluir a demonstração, o raciocínio é o mesmo do caso $n = 1$. Basta derivar a equação (2.1.11) com relação a ε e fazer $\varepsilon = 0$, usando que

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon^1(t, x) &= t + \int_0^\varepsilon \tau(\Phi_r(t, x)) dr \\ (\Phi_\varepsilon^2)^i(t, x) &= x^i + \int_0^\varepsilon \phi^i(\Phi_r(t, x)) dr, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.1.4 Considere a equação

$$dX(t) = f(X(t))dt.$$

Como $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, segue que a equação de Lie (2.1.6) fica $f_x \phi + f \tau_t + f \tau_x f = \phi_t + \phi_x f$, que possui $\tau = 1$ e $\phi = 0$ como uma possível solução. Assim, o campo $\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial t}$ é uma simetria de $dX(t) = f(X(t))dt$. A ação de tal campo é dada por $t \mapsto t + \varepsilon$, isto é, translação no tempo.

Exemplo 2.1.5 Considere a equação

$$dX(t) = f(t)dt.$$

De maneira semelhante, o campo $\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial x}$ é uma simetria de tal equação. A ação dada pelo fluxo associado à tal campo é uma translação no espaço.

2.2 Simetrias de equações estocásticas

Embora a teoria clássica das simetrias de Lie (simetria de equações diferenciais determinísticas) já exista há mais de um século, sua aplicação às EDEs começou a ser desenvolvida muito recentemente ([1], [8], [21], [24]).

Estamos interessados em obter simetrias de EDOs estocásticas em \mathbb{R}^n , no sentido de Itô, do tipo

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t), \quad (2.2.1)$$

onde $g(t, x) \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ para cada $(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, B é um movimento Browniano em \mathbb{R}^m e $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Embora estejamos considerando equações estocásticas, a definição de simetria permanece a mesma.

Definição 2.2.1 *Uma ação a 1-parâmetro, agindo no espaço das variáveis de uma dada EDE, é uma simetria de tal EDE se ela deixa as soluções da EDE invariante.*

No caso de um campo de vetores $\mathbf{X} = \tau(t, x)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x)\frac{\partial}{\partial x}$, com fluxo $\Phi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(t, x)$ agindo no espaço $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ das variáveis da EDE (2.2.1), tal fluxo produz uma ação

$$t \longmapsto \bar{t} = \Phi_\varepsilon^1(t, x) = t + \int_0^\varepsilon \tau(\Phi_r(t, x))dr$$

$$x \longmapsto \bar{x} = \Phi_\varepsilon^2(t, x) = x + \int_0^\varepsilon \phi(\Phi_r(t, x))dr.$$

Logo, o campo \mathbf{X} (ou o fluxo Φ_ε) é uma simetria de (2.2.1), se para toda solução $X = X(t)$ de (2.2.1), sua perturbação $\bar{X} = \bar{X}(\bar{t})$ também for solução de (2.2.1). De maneira mais precisa, o campo \mathbf{X} é uma simetria de (2.2.1) quando

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t)$$

implica

$$d\bar{X}(\bar{t}) = f(\bar{t}, \bar{X}(\bar{t}))d\bar{t} + g(\bar{t}, \bar{X}(\bar{t}))d\bar{B}(\bar{t}).$$

Note que \bar{B} é o movimento Browniano B , após a mudança no tempo $t \mapsto \bar{t}$ dada pelo fluxo (ver seção 1.2).

No caso em que $\tau(t, x) = \tau(t)$, pode-se obter o resultado abaixo (ver [8], [21]).

Teorema 2.2.2 *Se um campo de vetores $\mathbf{X} = \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x}$ é uma simetria da EDE*

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t), \quad (2.2.2)$$

então

$$\begin{aligned} f_t \tau + \tau_t f + f_x \phi &= \phi_t + \phi_x f + \frac{1}{2} \phi_{xx} (gg^T) \\ g_t \tau + \frac{1}{2} \tau_t g + g_x \phi &= \phi_x g. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Observação 2.2.3

1. Como no Teorema 2.1.2, a equação (2.2.3) significa que, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^i}{\partial t} \tau + \frac{\partial \tau}{\partial t} f^i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \phi^j &= \frac{\partial \phi^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j} f^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j \partial x^k} (gg^T)_{jk} \\ \frac{\partial g^{il}}{\partial t} \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial t} g^{il} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g^{il}}{\partial x^j} \phi^j &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j} g^{jl}, \quad 1 \leq l \leq m. \end{aligned}$$

2. Tomando $g = 0$ no Teorema 2.2.2, obtemos o Teorema 2.1.2 (no caso $\tau(t, x) = \tau(t)$).

Vamos demonstrar o teorema.

Demonstração: A ação do fluxo associado à \mathbf{X} é dada por

$$\begin{aligned} t &\longmapsto \bar{t} = \Phi_\varepsilon^1(t) = t + \int_0^\varepsilon \tau(\Phi_r(t)) dr \\ x &\longmapsto \bar{x} = \Phi_\varepsilon^2(t, x) = x + \int_0^\varepsilon \phi(\Phi_r(t, x)) dr. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Como estamos trabalhando com processos estocásticos, a mudança temporal não pode ser muito arbitrária, pois mudando o tempo, muda-se também a filtração, e isso pode

atrapalhar a integração estocástica. Sendo assim, vamos considerar a mudança temporal de [17], que foi apresentada na seção 1.2. Logo,

$$\bar{t} = \beta_\varepsilon(t) = \int_0^t \eta_\varepsilon(s)^2 ds, \quad (2.2.5)$$

com $\alpha = \alpha_\varepsilon(t)$ sendo a inversa de β_ε .

Suponha $n = m = 1$. Seja $X = X(t)$ uma solução de (2.2.2). A ação de Φ_ε em X é dada por

$$X(t) \mapsto \bar{X}(\bar{t}) = \Phi_\varepsilon^2(\alpha_\varepsilon(\bar{t}), X(\alpha_\varepsilon(\bar{t}))) = \Phi_\varepsilon^2(t, X(t)). \quad (2.2.6)$$

Fixado ε , segue da fórmula de Itô (Corolário 1.1.7) que

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon^2(t, X(t)) &= \Phi_\varepsilon^2(0, X(0)) + \int_0^t \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2} g^2 \right) (s, X(s)) ds \\ &\quad + \int_0^t \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} g \right) (s, X(s)) dB(s). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Efetuada uma mudança de variáveis, a primeira integral em (2.2.7) é igual a

$$\int_0^{\bar{t}} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2} g^2 \right) (\alpha_\varepsilon(s), X(\alpha_\varepsilon(s))) \frac{\partial \alpha_\varepsilon}{\partial t}(s) ds,$$

que é o mesmo que

$$\int_0^{\bar{t}} \frac{1}{\eta_\varepsilon(\alpha_\varepsilon(s))^2} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2} g^2 \right) (\alpha_\varepsilon(s), X(\alpha_\varepsilon(s))) ds.$$

Por sua vez, segundo o Teorema 1.2.1, a segunda integral em (2.2.7) é igual a

$$\int_0^{\bar{t}} \frac{1}{\eta_\varepsilon(\alpha_\varepsilon(s))} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} g \right) (\alpha_\varepsilon(s), X(\alpha_\varepsilon(s))) d\bar{B}(s).$$

Assim, a equação (2.2.7) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \bar{X}(\bar{t}) &= \bar{X}(0) + \int_0^{\bar{t}} \frac{1}{\eta_\varepsilon(\alpha_\varepsilon(s))^2} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2} g^2 \right) (\alpha_\varepsilon(s), X(\alpha_\varepsilon(s))) ds \\ &\quad + \int_0^{\bar{t}} \frac{1}{\eta_\varepsilon(\alpha_\varepsilon(s))} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} g \right) (\alpha_\varepsilon(s), X(\alpha_\varepsilon(s))) d\bar{B}(s). \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Por outro lado, por hipótese, a perturbação da solução X deve cumprir

$$\overline{X}(\bar{t}) = \overline{X}(0) + \int_0^{\bar{t}} f(s, \overline{X}(s))ds + \int_0^{\bar{t}} g(s, \overline{X}(s))d\overline{B}(s), \quad (2.2.9)$$

pois estamos supondo que tal perturbação é uma simetria. Comparando as integrais presentes nas igualdades (2.2.8) e (2.2.9), obtemos

$$f(\bar{t}, \overline{X}(\bar{t})) = \frac{1}{\eta_\varepsilon(t)^2} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2} g^2 \right) (t, X(t))$$

$$g(\bar{t}, \overline{X}(\bar{t})) = \frac{1}{\eta_\varepsilon(t)} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} g \right) (t, X(t)),$$

ou seja,

$$f(\beta_\varepsilon(t), \Phi_\varepsilon^2(t, X(t)))\eta_\varepsilon(t)^2 = \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2} g^2 \right) (t, X(t)) \quad (2.2.10)$$

$$g(\beta_\varepsilon(t), \Phi_\varepsilon^2(t, X(t)))\eta_\varepsilon(t) = \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} g \right) (t, X(t)). \quad (2.2.11)$$

Portanto, \mathbf{X} é uma simetria da EDE (2.2.3) se, e somente se, as equações (2.2.10) e (2.2.11) são verificadas para todo $\varepsilon \geq 0$. Para obter as equações de Lie, que são condições infinitesimais, derivamos essas equações com relação à ε , e fazemos $\varepsilon = 0$. Derivando a equação (2.2.10), obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial \varepsilon} \right) \eta_\varepsilon^2 + 2\eta_\varepsilon \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial \varepsilon} f &= \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial \varepsilon \partial t} + \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial \varepsilon \partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Phi_\varepsilon^2}{\partial \varepsilon \partial x^2} g^2 \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} f \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} \right)^2 g^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2} g^2. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Por outro lado, derivando a equação (2.2.11), temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial \varepsilon} \right) \eta_\varepsilon + \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial \varepsilon} g &= \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial \varepsilon \partial x} g \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} g. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Dos elementos presentes nas equações (2.2.11) e (2.2.12), vários já calculamos na demonstração do Teorema 2.1.2. Abaixo, calculamos os que ainda não obtemos anteriormente. Faremos isso utilizando as equações (2.2.4) e (2.2.5).

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2}(t, X(t)) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ x + \int_0^\varepsilon \phi(\Phi_r(t, x)) dr \right\} \Big|_{x=X(t)} \\
&= 0 + \int_0^\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\phi(\Phi_r(t, x))] dr \Big|_{x=X(t)}. \\
\bullet \quad \frac{\partial^3 \Phi_\varepsilon^2}{\partial \varepsilon \partial x^2}(t, X(t)) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \int_0^\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\phi(\Phi_r(t, x))] dr \right\} \Big|_{x=X(t)} \\
&= \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} \\
&\quad + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} \right)^2. \\
\bullet \quad \eta_\varepsilon(t)^2 &= \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial t}(t). \\
\bullet \quad \eta_\varepsilon(t) &= \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial t}(t) \right)^{\frac{1}{2}}. \\
\bullet \quad \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial t}(t) \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^1}{\partial \varepsilon \partial t}.
\end{aligned}$$

Por fim, tomando $\varepsilon = 0$ nas equações (2.2.11) e (2.2.12), obtemos as condições (2.2.3), no caso $n = m = 1$.

Suponha n e m quaisquer. As equações (2.2.10) e (2.2.11) ficam, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$f^i \eta_\varepsilon^2 = \frac{\partial (\Phi_\varepsilon^2)^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial (\Phi_\varepsilon^2)^i}{\partial x^j} f^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 (\Phi_\varepsilon^2)^i}{\partial x^j \partial x^k} (gg^T)_{jk} \quad (2.2.14)$$

$$g_{il} \eta_\varepsilon = \sum_{j=1}^n \frac{\partial (\Phi_\varepsilon^2)^i}{\partial x^j} g_{jl}, \quad 1 \leq l \leq m. \quad (2.2.15)$$

Logo, para concluir a demonstração, o raciocínio é o mesmo do caso $n = 1$. Basta derivar as equações (2.2.14) e (2.2.15) com relação à ε e fazer $\varepsilon = 0$, lembrando que

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon^1(t, x) &= t + \int_0^\varepsilon \tau(\Phi_r(t, x)) dr \\ (\Phi_\varepsilon^2)^i(t, x) &= x^i + \int_0^\varepsilon \phi^i(\Phi_r(t, x)) dr, \quad 1 \leq i \leq n.\end{aligned}$$

□

Vejamos alguns exemplos de simetrias de EDEs.

Exemplo 2.2.4

$$dX(t) = dB(t)$$

Para a equação do movimento Browniano real, as equações de Lie (2.2.3) ficam

$$0 = \phi_t + \frac{1}{2}\phi_{xx} \quad (2.2.16)$$

$$\frac{1}{2}\tau_t = \phi_x. \quad (2.2.17)$$

Derivando (2.2.17) com relação à x , obtemos $\phi_{xx} = 0$, donde segue que $\phi(t, x) = c_1(t)x + c_2(t)$. Substituindo em (2.2.16), segue que $\frac{\partial}{\partial t}[c_1(t)x + c_2(t)] = 0$, isto é, as funções $c_1(t)$ e $c_2(t)$ devem ser constantes, digamos c_1 e c_2 , respectivamente. Substituindo em (2.2.17), concluímos que $\tau(t) = 2c_1t + c_3$. Logo, fazendo $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ e $c_3 = 0$, depois $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ e $c_3 = 0$, e por fim $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ e $c_3 = 1$, obtemos os geradores infinitesimais das simetrias do movimento Browniano, que são

$$\mathbf{X}_1 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{X}_2 = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_3 = \frac{\partial}{\partial t}.$$

As ações que esses geradores infinitesimais produzem são:

$$\begin{array}{lll} G_1 : & t \longmapsto e^{2\varepsilon}t & G_2 : & t \longmapsto t & G_3 : & t \longmapsto t + \varepsilon \\ & x \longmapsto e^\varepsilon x & & x \longmapsto x + \varepsilon & & x \longmapsto x. \end{array}$$

Note que G_2 corresponde à uma translação no espaço, G_3 à uma translação no tempo e G_1 ao “*Brownian scaling*” (ver [17], Capítulo 2, exercício 2.16). Tais simetrias significam que se $B = B(t)$ é um movimento Browniano, então

$$\bar{B}^1(t) = \frac{1}{c} B(c^2 t), \quad c > 0 \quad (c = e^{-\varepsilon})$$

$$\bar{B}^2(t) = B(t) + c, \quad c > 0 \quad (c = \varepsilon)$$

$$\bar{B}^3(t) = B(t - c), \quad c > 0 \quad (c = \varepsilon).$$

satisfazem a EDE

$$dX(t) = d\bar{B}^i(t), \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Note que a simetria não preserva (necessariamente) as propriedades do processo solução da EDE. A simetria apenas preserva o fato de ser uma solução. Entretanto, note que cada \bar{B}^i é, também, um movimento Browniano (com, possivelmente, outro ponto inicial ou outra filtração).

Observação 2.2.5 Se $B(t) = (B^1(t), B^2(t))$ é um movimento Browniano em \mathbb{R}^2 e A é uma matriz ortogonal em \mathbb{R}^2 , ou seja, $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, onde θ é uma constante, então $\bar{B}(t) = AB(t)$ é um movimento Browniano (veja [17], Capítulo 2, exercício 2.15). Analisemos isso de acordo com as simetrias de Lie. O campo de vetores $\mathbf{X} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ em \mathbb{R}^2 (com coordenadas $(x^1, x^2) = (x, y)$), admite o fluxo associado Φ_ε , dado por $t \mapsto t$ e $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Em particular, temos que $\bar{B}(t) = \Phi_\theta(t, B^1(t), B^2(t))$. Note que o campo \mathbf{X} não é uma simetria nesse caso, pois as equações 2.2.3, para a EDE

$$d \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB^1(t) \\ dB^2(t) \end{pmatrix}$$

ficam

$$\begin{aligned}
0 &= \phi_t^1 + \frac{1}{2}(\phi_{xx}^1 + \phi_{yy}^1) \\
0 &= \phi_t^2 + \frac{1}{2}(\phi_{xx}^2 + \phi_{yy}^2) \\
\frac{1}{2}\tau_t &= \phi_x^1 \\
0 &= \phi_x^2 \\
0 &= \phi_y^1 \\
\frac{1}{2}\tau_t &= \phi_y^2,
\end{aligned}$$

que não são satisfeitas pelo campo \mathbf{X} ($\tau(t) = 0$ e $\phi(t, x, y) = (-y, x)$), já que $\phi_y^1 = -1 \neq 0$ e $\phi_x^2 = 1 \neq 0$.

Logo, no caso do movimento Browniano em \mathbb{R}^2 , o fluxo associado ao campo $\mathbf{X} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$, cuja ação é uma rotação no espaço das variáveis (x, y) , não é uma simetria. Todavia, tal fluxo leva um movimento Browniano em outro movimento Browniano.

Exemplo 2.2.6

$$dX(t) = aX(t)dt + b dB(t)$$

Esta equação é conhecida como a equação de Langevin. Sua solução é o processo de Ornstein-Uhlenbeck. Aqui, as equações de Lie (2.2.3) ficam

$$\tau_t a x + a \phi = \phi_t + \phi_x a x + \frac{1}{2} \phi_{xx} b^2 \quad (2.2.18)$$

$$\frac{1}{2} \tau_t b = \phi_x b. \quad (2.2.19)$$

Derivando (2.2.19) com relação à x , obtemos $\phi_{xx} = 0$, donde segue que $\phi(t, x) = c_1(t)x + c_2(t)$. Substituindo em (2.2.18), segue que $[2c_1(t)a - c_1'(t)]x + [ac_2(t) - c_2'(t)] = 0$. Isso implica que $c_1(t) = c_1 e^{2at}$ e $c_2(t) = c_2 e^{at}$, onde c_1 e c_2 são constantes. Assim, $\phi(t, x) = c_1 e^{2at} x + c_2 e^{at}$. Substituindo em (2.2.19), segue que $\tau(t) = \frac{c_1 e^{2at}}{a} + c_3$. Logo, os geradores

infinitesimais das simetrias da equação de Langevin são

$$\mathbf{X}_1 = \frac{e^{2at}}{a} \frac{\partial}{\partial t} + e^{2at} x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{X}_2 = e^{at} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_3 = \frac{\partial}{\partial t}.$$

As ações que esses geradores infinitesimais produzem são:

$$\begin{aligned} G_1 : \quad t &\longmapsto \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{-e^{2at}}{2e^{2at}\varepsilon - 1} \right) & G_2 : \quad t &\longmapsto t & G_3 : \quad t &\longmapsto t + \varepsilon \\ x &\longmapsto \frac{x}{\sqrt{-2e^{2at}\varepsilon + 1}} & x &\longmapsto x + e^{at}\varepsilon & x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Observação 2.2.7 À cada EDE

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t), \quad (2.2.20)$$

corresponde uma equação diferencial parcial

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} (f^i p) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \left((gg^T)_{ij} p \right), \quad (2.2.21)$$

chamada de equação de Fokker-Plank, que descreve a evolução da medida de probabilidade $p = p(t, x)$, induzida pela EDE (2.2.20).

Em [8], G. Gaeta e N. Quintero demonstram que se o campo de vetores

$$\mathbf{X} = \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x}$$

(no espaço das variáveis (t, x)) é uma simetria de (2.2.20), então o campo

$$\mathbf{X}_0 = \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + \xi(t, x, p) \frac{\partial}{\partial p}$$

(no espaço das variáveis (t, x, p)) é uma simetria de (2.2.21), onde ξ satisfaz certas condições.

Com isso, conhecendo as simetrias de EDEs, podemos obter algumas das simetrias de certas equações diferenciais parciais (determinísticas).

2.3 Transformações entre equações diferenciais

Nesta seção, apresentamos o método introduzido por G. Bluman et al. (ver [3], Capítulo 2). Este método nos permite obter, de maneira sistemática, transformações entre equações diferenciais. Embora o método possa ser aplicado até mesmo à sistemas de equações diferenciais parciais, nosso foco será em EDOs.

Suponha que queiramos resolver uma EDO explicitamente. Uma das maneiras de fazer isso, é encontrar uma EDO alvo, cuja solução é previamente conhecida, e uma aplicação que leve soluções da primeira EDO, em soluções da EDO alvo. Uma vez feito isso, basta inverter tal aplicação para obter a solução da EDO inicial.

Consideramos, então, o problema de determinar se existe uma aplicação que leve uma EDO dada, numa EDO alvo e, de construir tal aplicação, caso exista.

Se a aplicação for invertível, então todo gerador infinitesimal de uma simetria da EDO dada é levado num gerador infinitesimal de uma simetria da EDO alvo. Além disso, a aplicação invertível deve estabelecer um isomorfismo entre toda subálgebra de Lie de geradores infinitesimais de simetrias da EDO dada e a subálgebra de Lie correspondente, dos geradores infinitesimais de simetrias da EDO alvo.

No caso em que a aplicação não é invertível, então ela deve estabelecer um homomorfismo, ao invés de um isomorfismo. Nesse caso, a aplicação deve levar todo gerador infinitesimal de uma simetria da EDO dada em um gerador infinitesimal (que pode ser o gerador nulo) de uma simetria da EDO alvo.

Considere a seguinte EDO dada (em \mathbb{R}^n):

$$dX(t) = f(t, X(t))dt, \quad (2.3.1)$$

e a seguinte EDO alvo (em \mathbb{R}^n):

$$dY(s) = F(s, Y(s))ds. \quad (2.3.2)$$

Geradores infinitesimais de simetrias de (2.3.1) são campos de vetores

$$\mathbf{X} = \tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \text{onde} \quad f_t \tau + \tau_t f + f_x \phi = \phi_t + \phi_x f. \quad (2.3.3)$$

Por outro lado, geradores infinitesimais de simetrias de (2.3.2) são campos de vetores

$$\mathbf{Y} = \rho(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \psi(t, x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \text{onde} \quad F_t \rho + \rho_t F + F_x \psi = \psi_t + \psi_x F. \quad (2.3.4)$$

A ação que o campo \mathbf{X} gera, nas variáveis $(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, é dada pela ação de seu fluxo, que denotamos por

$$\begin{aligned} t &\longmapsto \bar{t} = \Phi_\varepsilon^1(t, x) = t + \int_0^\varepsilon \tau(\Phi_r(t, x)) dr \\ x &\longmapsto \bar{x} = \Phi_\varepsilon^2(t, x) = x + \int_0^\varepsilon \phi(\Phi_r(t, x)) dr \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Analogamente, denotamos a ação de \mathbf{Y} nas variáveis $(s, y) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ por

$$\begin{aligned} s &\longmapsto \hat{t} = \Psi_\varepsilon^1(s, y) = s + \int_0^\varepsilon \rho(\Psi_r(s, y)) dr \\ y &\longmapsto \hat{y} = \Psi_\varepsilon^2(s, y) = y + \int_0^\varepsilon \psi(\Psi_r(s, y)) dr \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Denote por μ a aplicação (supondo que ela exista) que transforme qualquer solução $X = X(t)$ de (2.3.1) em uma solução $Y = Y(t)$ de (2.3.2). A priori, estamos procurando por uma aplicação local da forma

$$\begin{aligned} t &\longmapsto t^* = \mu^1(t, x) \\ x &\longmapsto x^* = \mu^2(t, x) \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Através da aplicação $\mu = \mu(t, x)$, um campo \mathbf{X} , como em (2.3.3), deve ser levado em um campo \mathbf{Y} , como em (2.3.4). Logo, o seguinte diagrama deve comutar:

$$\begin{array}{ccc} (t, x) & \xrightarrow{\mathbf{X}} & (\bar{t}, \bar{x}) \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ (s, y) & \xrightarrow{\mathbf{Y}} & (\hat{s}, \hat{y}). \end{array} \quad (2.3.8)$$

Teorema 2.3.1 *Se $\mu = \mu(t, x)$ leva soluções de (2.3.1) em soluções de (2.3.2), então*

$$\begin{aligned} \rho \circ \mu &= \frac{\partial \mu^1}{\partial t} \tau + \frac{\partial \mu^1}{\partial x} \phi \\ \psi \circ \mu &= \frac{\partial \mu^2}{\partial t} \tau + \frac{\partial \mu^2}{\partial x} \phi, \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

para todo (t, x) .

Observação 2.3.2 As equações em (2.3.9) significam que, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned}\rho \circ \mu &= \frac{\partial \mu^1}{\partial t} \tau + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mu^1}{\partial x^j} \phi^j \\ \psi^i \circ \mu &= \frac{\partial (\mu^2)^i}{\partial t} \tau + \sum_{j=1}^n \frac{\partial (\mu^2)^i}{\partial x^j} \phi^j.\end{aligned}$$

Demonstração: Suponha $n = 1$. Através do diagrama (2.3.8), obtemos que

$$\widehat{\mu(t, x)} = \mu(\bar{t}, \bar{x}),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\widehat{\mu^1(t, x)} &= \mu^1(\bar{t}, \bar{x}) \\ \widehat{\mu^2(t, x)} &= \mu^2(\bar{t}, \bar{x}).\end{aligned}\tag{2.3.10}$$

Utilizando (2.3.5) e (2.3.6), as igualdades em (2.3.10) significam que, para todo (t, x) e para todo $\varepsilon \geq 0$,

$$\begin{aligned}\Psi_\varepsilon^1(\mu(t, x)) &= \mu_1(\Phi_\varepsilon^1(t, x), \Phi_\varepsilon^2(t, x)) \\ \Psi_\varepsilon^2(\mu(t, x)) &= \mu_2(\Phi_\varepsilon^1(t, x), \Phi_\varepsilon^2(t, x)).\end{aligned}\tag{2.3.11}$$

Derivando as igualdades em (2.3.11) com relação à ε , segue que

$$\begin{aligned}(\rho \circ \Psi_\varepsilon \circ \mu)(t, x) &= \frac{\partial \mu^1}{\partial t}(\Phi_\varepsilon(t, x)) \tau(t, x) + \frac{\partial \mu^1}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, x)) \phi(t, x) \\ (\psi \circ \Psi_\varepsilon \circ \mu)(t, x) &= \frac{\partial \mu^2}{\partial t}(\Phi_\varepsilon(t, x)) \tau(t, x) + \frac{\partial \mu^2}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, x)) \phi(t, x).\end{aligned}\tag{2.3.12}$$

Para finalizar a prova do teorema, no caso $n = 1$, basta fazer $\varepsilon = 0$ em (2.3.12).

A demonstração para n qualquer segue sem dificuldades. \square

Uma aplicação imediata desta teoria, é de poder obter, de maneira sistemática, a transformação

$$\begin{aligned}t &\longmapsto t \\ x &\longmapsto x \\ u &\longmapsto -2u^{-1}u_x,\end{aligned}$$

conhecida como transformação de Hopf-Cole, que leva soluções da equação do calor $u_t = u_{xx}$, em soluções da equação de Burgers $u_t + uu_x = u_{xx}$ (ver [3], seção 2.3.1).

Vários outros exemplos estão disponíveis em [3]. Na Seção 3.2, daremos exemplos de como obter transformações entre EDEs, sendo que a metodologia é a mesma empregada no caso determinístico.

Capítulo 3

Simetria estocástica

Neste capítulo, introduzimos o conceito de simetria estocástica e obtemos alguns resultados concernindo as mesmas. Na primeira seção, obtemos as equações de Lie para essas simetrias, no caso de equações ordinárias (determinísticas ou estocásticas). Tais equações fornecem condições necessárias para se ter simetria. Na sequência, na Seção 3.2, introduzimos uma possível definição de coordenadas canônicas no caso de simetrias estocásticas. Por fim, na Seção 3.3, estendemos a teoria de G. Bluman et al. ([3]), introduzida na seção 2.3, para equações estocásticas.

3.1 Simetria estocástica

Dado um campo de vetores $\mathbf{X} = \tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x}$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, seu fluxo associado $\Phi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(t, x)$ age nas variáveis t e x da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} t &\longmapsto \Phi_\varepsilon^1(t, x) = t + \int_0^\varepsilon \tau(\Phi_r(t, x)) dr \\ x &\longmapsto \Phi_\varepsilon^2(t, x) = x + \int_0^\varepsilon \phi(\Phi_r(t, x)) dr. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Aqui, $\tau, \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Na seção 2.1, vimos quando um tal fluxo é uma simetria de uma EDO determinística

do tipo $dX(t) = f(t, X(t))dt$. Isso acontece quando as componentes do campo cumprem

$$f_t\tau + f_x\phi + f\tau_t + f\tau_x f = \phi_t + \phi_x f. \quad (3.1.2)$$

Na seção 2.2, vimos que no caso de uma EDO estocástica $dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t)$, e no caso em que $\tau(t, x) = \tau(t)$, essas condições ficam

$$\begin{aligned} f_t\tau + \tau_t f + f_x\phi &= \phi_t + \phi_x f + \frac{1}{2}\phi_{xx}g^2 \\ g_t\tau + \frac{1}{2}\tau_t g + g_x\phi &= \phi_x g. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Tais condições nos dizem quando uma certa perturbação deixa as soluções de uma EDO invariante. Tanto na teoria clássica (Seção 2.1) quanto na teoria de simetrias para EDEs (Seção 2.2), a perturbação considerada é a ação de um fluxo determinístico, ou seja, a ação dada em (3.1.1). Olhando dessa maneira, é natural indagar o que acontece quando consideramos uma perturbação estocástica, isto é, quando a ação nas variáveis t e x é dada pela ação de um fluxo estocástico do tipo

$$\begin{aligned} t &\longmapsto \Phi_\varepsilon^1(t, x) = t + \int_0^\varepsilon \tau(\Phi_r(t, x))dr + \int_0^\varepsilon \tilde{\tau}(\Phi_r(t, x))dB(r) \\ x &\longmapsto \Phi_\varepsilon^2(t, x) = x + \int_0^\varepsilon \phi(\Phi_r(t, x))dr + \int_0^\varepsilon \tilde{\phi}(\Phi_r(t, x))dB(r), \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

onde B é um movimento Browniano e $\tilde{\tau}, \tilde{\phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Observação 3.1.1 Note que estamos tomando o mesmo movimento Browniano B da EDE estudada para compor o fluxo estocástico. Porém, poderíamos tomar um fluxo estocástico composto de uma integral estocástica com relação a outro processo.

No que segue, iremos responder a pergunta acima no caso de EDOs (determinísticas e estocásticas).

Seja

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t), \quad (3.1.5)$$

uma EDE em \mathbb{R} (no sentido de Itô), com $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $B(t)$ um movimento Browniano real (note que se fizermos $g = 0$, obtemos uma EDO determinística). Queremos obter

condições sobre as funções $\tau, \tilde{\tau}, \phi, \tilde{\phi}$ para que a ação dada em (3.1.4) mantenha fixa as soluções de (3.1.5). No caso de fluxos determinísticos, temos que um campo de vetores

$$\mathbf{X} = \tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x}$$

gera um fluxo Φ_ε , que age nas variáveis t e x como em (3.1.1), isto é,

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(t, x) &= (t, x) + \int_0^\varepsilon (\tau(\Phi_r(t, x)), \phi(\Phi_r(t, x))) dr \\ &= (t, x) + \int_0^\varepsilon \mathbf{X}(\Phi_r(t, x)) dr. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Para fluxos estocásticos, a ação dada em (3.1.4) é o mesmo que

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(t, x) &= (t, x) + \int_0^\varepsilon (\tau(\Phi_r(t, x)), \phi(\Phi_r(t, x))) dr \\ &\quad + \int_0^\varepsilon (\tilde{\tau}(\Phi_r(t, x)), \tilde{\phi}(\Phi_r(t, x))) dB(r). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Comparando (3.1.6) e (3.1.7), sugerimos que o fluxo estocástico seja oriundo de um campo de vetores estocástico, cuja definição é dada abaixo.

Definição 3.1.2 *Um campo de vetores estocástico, é um campo do tipo*

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^D + \mathbf{X}^S, \quad (3.1.8)$$

onde $\mathbf{X}^D = \tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x}$ é sua parte determinística e $\mathbf{X}^S = \tilde{\tau}(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\phi}(t, x) \frac{\partial}{\partial x}$ sua parte estocástica, isto é,

$$\mathbf{X} = \left[\tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \right]^D + \left[\tilde{\tau}(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\phi}(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \right]^S. \quad (3.1.9)$$

Os índices D e S representam as siglas determinístico e estocástico (do inglês). O fluxo associado à esse campo de vetores estocástico, é dado por

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(t, x) &= (t, x) + \int_0^\varepsilon \mathbf{X}^D(\Phi_r(t, x)) dr + \int_0^\varepsilon \mathbf{X}^S(\Phi_r(t, x)) dB(r) \\ &= (t, x) + \int_0^\varepsilon (\tau(\Phi_r(t, x)), \phi(\Phi_r(t, x))) dr + \int_0^\varepsilon (\tilde{\tau}(\Phi_r(t, x)), \tilde{\phi}(\Phi_r(t, x))) dB(r), \end{aligned}$$

que coincide com (3.1.7).

Com isso, podemos introduzir a definição de simetria estocástica.

Definição 3.1.3 *Seja $\mathbf{X} = \mathbf{X}^D + \mathbf{X}^S$ um campo de vetores estocástico. Dizemos que o campo \mathbf{X} (ou que seu fluxo) é uma simetria estocástica de uma equação diferencial quando a perturbação, dada pela ação do fluxo associado à \mathbf{X} , mantém invariante as soluções dessa equação diferencial.*

No caso de EDOs do tipo (3.1.5), denote por $t \mapsto \bar{t}$ e $x \mapsto \bar{x}$ a ação do fluxo estocástico dada por (3.1.4). Com essa notação, a definição acima significa que, dada uma solução $X = X(t)$ de (3.1.5), sua perturbação pelo fluxo Φ_ε também é uma solução de (3.1.5). Isso é o mesmo que dizer que

$$d\bar{X}(\bar{t}) = f(\bar{t}, \bar{X}(\bar{t}))d\bar{t} + g(\bar{t}, \bar{X}(\bar{t}))d\bar{B}(\bar{t}), \quad (3.1.10)$$

onde \bar{B} é o movimento Browniano B , após a mudança no tempo $t \mapsto \bar{t}$ dada pelo fluxo.

Quando $\tau(t, x) = \tau(t)$ e $\tilde{\tau}(t, x) = 0$, conseguimos provar o teorema abaixo, que estende o que foi feito até então, devido à existência do fator $\tilde{\phi}$. Note que estamos considerando apenas a mudança espacial como sendo estocástica. A mudança temporal permanece a mesma.

Teorema 3.1.4 *Se um campo de vetores $\mathbf{X} = \mathbf{X}^D + \mathbf{X}^S$, onde $\mathbf{X}^D = \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x}$ e $\mathbf{X}^S = \tilde{\phi}(t, x) \frac{\partial}{\partial x}$, é uma simetria estocástica de uma EDE*

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t), \quad (3.1.11)$$

então

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} \tau + \frac{\partial \tau}{\partial t} f + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \tilde{\phi}^2 &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot g^2 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \tilde{\phi} &= \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \cdot f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} \cdot g^2 \\ \frac{\partial g}{\partial t} \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial t} g + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \cdot \tilde{\phi}^2 &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot g \\ \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \tilde{\phi} &= \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \cdot g. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Observação 3.1.5

1. Tomando $\tilde{\phi} = 0$ em (3.1.12), obtemos a condição (3.1.3). Em particular, se

$$\mathbf{X} = \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x}$$

é uma simetria de (3.1.11), no sentido do Teorema 2.2.2, então o campo

$$\mathbf{X} = \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} = \left[\tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \right]^D + \left[0 \frac{\partial}{\partial x} \right]^S$$

é uma simetria estocástica da mesma equação. Isso mostra que toda simetria clássica é uma simetria estocástica

2. Tomando $g = 0$ em (3.1.12), obtemos condições necessárias para se ter simetrias estocásticas de EDOs determinísticas.

Vamos provar o teorema.

Demonstração: A ação do fluxo é dada por

$$t \longmapsto \bar{t} = \Phi_\varepsilon^1(t) = t + \int_0^\varepsilon \tau(\Phi_r^1(t)) dr \quad (3.1.13)$$

$$x \longmapsto \bar{x} = \Phi_\varepsilon^2(t, x) = x + \int_0^\varepsilon \phi(\Phi_r(t, x)) dr + \int_0^\varepsilon \tilde{\phi}(\Phi_r(t, x)) dB(r), \quad (3.1.14)$$

onde estamos considerando a ação temporal como na seção 2.2, ou seja,

$$\bar{t} = \beta_\varepsilon(t) = \int_0^t \eta_\varepsilon(s)^2 ds. \quad (3.1.15)$$

Seja $X = X(t)$ uma solução de (3.1.11). A ação do fluxo na solução X é dada por

$$X(t) \mapsto \bar{X}(\bar{t}) = \Phi_\varepsilon^2(\alpha_\varepsilon(\bar{t}), X(\alpha_\varepsilon(\bar{t}))) = \Phi_\varepsilon^2(t, X(t)). \quad (3.1.16)$$

Fixado ε , segue da fórmula de Itô que

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon^2(t, X(t)) &= \Phi_\varepsilon^2(0, X(0)) + \int_0^t \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2} g^2 \right) (s, X(s)) ds \\ &\quad + \int_0^t \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} g \right) (s, X(s)) dB(s). \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Efetuada uma mudança de variáveis, a primeira integral em (3.1.17) é igual a

$$\int_0^{\bar{t}} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2} g^2 \right) (\alpha_\varepsilon(s), X(\alpha_\varepsilon(s))) \frac{\partial \alpha_\varepsilon(s)}{\partial t} ds$$

que é o mesmo que

$$\int_0^{\bar{t}} \frac{1}{\eta_\varepsilon(\alpha_\varepsilon(s))^2} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2} g^2 \right) (\alpha_\varepsilon(s), X(\alpha_\varepsilon(s))) ds.$$

Por outro lado, de acordo com o Teorema 1.2.1, a segunda integral em (3.1.17) é igual a

$$\int_0^{\bar{t}} \frac{1}{\eta_\varepsilon(\alpha_\varepsilon(s))} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} g \right) (\alpha_\varepsilon(s), X(\alpha_\varepsilon(s))) d\bar{B}(s).$$

Assim, a equação (3.1.17) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \bar{X}(\bar{t}) &= \bar{X}(0) + \int_0^{\bar{t}} \frac{1}{\eta_\varepsilon(\alpha_\varepsilon(s))^2} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2} g^2 \right) (\alpha_\varepsilon(s), X(\alpha_\varepsilon(s))) ds \\ &\quad + \int_0^{\bar{t}} \frac{1}{\eta_\varepsilon(\alpha_\varepsilon(s))} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} g \right) (\alpha_\varepsilon(s), X(\alpha_\varepsilon(s))) d\bar{B}(s). \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Mas, por hipótese, \mathbf{X} é uma simetria (estocástica). Logo, a equação (3.1.10) deve ser satisfeita, isto é,

$$\bar{X}(\bar{t}) = \bar{X}(0) + \int_0^{\bar{t}} f(s, \bar{X}(s)) ds + \int_0^{\bar{t}} g(s, \bar{X}(s)) d\bar{B}(s). \quad (3.1.19)$$

Igualando as equações (3.1.18) e (3.1.19), obtemos que, para todo ε ,

$$f(\bar{t}, \bar{X}(\bar{t})) = \frac{1}{\eta_\varepsilon(t)^2} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2} g^2 \right) (t, X(t))$$

$$g(\bar{t}, \bar{X}(\bar{t})) = \frac{1}{\eta_\varepsilon(t)} \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} g \right) (t, X(t)),$$

ou seja,

$$f(\beta_\varepsilon(t), \Phi_\varepsilon^2(t, X(t))) \eta_\varepsilon(t)^2 = \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2} g^2 \right) (t, X(t)) \quad (3.1.20)$$

$$g(\beta_\varepsilon(t), \Phi_\varepsilon^2(t, X(t))) \eta_\varepsilon(t) = \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} g \right) (t, X(t)). \quad (3.1.21)$$

Note que, até este ponto, a demonstração é idêntica à demonstração do Teorema 2.2.2. O que vamos fazer de diferente, é calcular o diferencial com relação a ε das equações (3.1.20) e (3.1.21), já que a ação espacial depende de uma equação estocástica. (No capítulo 2.2, calculamos a derivada).

Do lado direito das igualdades (3.1.20) e (3.1.21), temos

Afirmção 1:

$$\begin{aligned}
& d_\varepsilon \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} \cdot f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2} \cdot g^2 \right) (t, X(t)) \\
&= \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t}(t, X(t)) \right. \\
&\quad + \frac{\partial \phi}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x}(t, X(t)) \cdot f(t, X(t)) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x}(t, X(t))^2 \cdot g(t, X(t))^2 \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2}(t, X(t)) \cdot g(t, X(t))^2 \right\} d\varepsilon \\
&+ \left\{ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t}(t, X(t)) \right. \\
&\quad + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x}(t, X(t)) \cdot f(t, X(t)) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x}(t, X(t))^2 \cdot g(t, X(t))^2 \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2}(t, X(t)) \cdot g(t, X(t))^2 \right\} dB(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Demonstração: Precisamos calcular o diferencial de $\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t}$, $\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2}$ com relação a ε .

Utilizando a equação (3.1.14), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t}(t, X(t)) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ x + \int_0^\varepsilon \phi(\Phi_r(t, x)) dr + \int_0^\varepsilon \tilde{\phi}(\Phi_r(t, x)) dB(r) \right\} \Big|_{x=X(t)} \\ &= 0 + \left\{ \int_0^\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} [\phi(\Phi_r(t, x))] dr + \int_0^\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\phi}(\Phi_r(t, x))] dB(r) \right\} \Big|_{x=X(t)}. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi(\Phi_r(t, x))] = \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi_r^1}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi_r^2}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\phi}(\Phi_r(t, x))] = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \frac{\partial \Phi_r^1}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_r^2}{\partial t},$$

segue que

$$d_\varepsilon \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} \right\} d\varepsilon + \left\{ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} \right\} dB(\varepsilon).$$

O diferencial dos termos $\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2}$ são calculados da mesma maneira. □

Afirmção 2:

$$\begin{aligned} d_\varepsilon \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} \cdot g \right) (t, X(t)) &= \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} (\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} (t, X(t)) \cdot g(t, X(t)) \right\} d\varepsilon \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} (\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} (t, X(t)) \cdot g(t, X(t)) \right\} dB(\varepsilon). \end{aligned}$$

Demonstração: Análoga à Afirmção 1. □

Por sua vez, do lado esquerdo das igualdades (3.1.20) e (3.1.21), temos

Afirmção 3:

$$\begin{aligned} d_\varepsilon f(\beta_\varepsilon(t), \Phi_\varepsilon^2(t, X(t))) &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} \tau + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \tilde{\phi}^2 \right\} d\varepsilon \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \tilde{\phi} dB(\varepsilon) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_\varepsilon g(\beta_\varepsilon(t), \Phi_\varepsilon^2(t, X(t))) &= \left\{ \frac{\partial g}{\partial t} \tau + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \cdot \tilde{\phi}^2 \right\} d\varepsilon \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \tilde{\phi} dB(\varepsilon). \end{aligned}$$

Demonstração: Segue da fórmula de Itô para as funções f e g compostas com $\varepsilon \mapsto (\beta_\varepsilon(t), \Phi_\varepsilon^2(t, X(t)))$. De fato, para a função f temos

$$d_\varepsilon f(\beta_\varepsilon(t), \Phi_\varepsilon^2(t, X(t))) = \frac{\partial f}{\partial t} d\beta_\varepsilon + \frac{\partial f}{\partial x} d\Phi_\varepsilon^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d\langle \Phi_\varepsilon^2, \Phi_\varepsilon^2 \rangle(\varepsilon).$$

Usando as equações (3.1.13), (3.1.14) e (3.1.15), obtemos

$$\begin{aligned} d_\varepsilon \beta_\varepsilon(t) &= d_\varepsilon \Phi_\varepsilon^1(t, X(t)) \\ &= \tau(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) d\varepsilon, \end{aligned}$$

$$d_\varepsilon \Phi_\varepsilon^2(t, X(t)) = \phi(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) d\varepsilon + \tilde{\phi}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) dB(\varepsilon)$$

e

$$d_\varepsilon \langle \Phi_\varepsilon^2(t, X(t)), \Phi_\varepsilon^2(t, X(t)) \rangle(\varepsilon) = \tilde{\phi}(\Phi_\varepsilon(t, X(t)))^2 d\varepsilon.$$

Logo,

$$\begin{aligned} d_\varepsilon f(\beta_\varepsilon(t), \Phi_\varepsilon^2(t, X(t))) &= \frac{\partial f}{\partial t}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \tau(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) d\varepsilon \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \left\{ \phi(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) d\varepsilon + \tilde{\phi}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) dB(\varepsilon) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \tilde{\phi}(\Phi_\varepsilon(t, X(t)))^2 d\varepsilon. \end{aligned}$$

Para a função g , a conta é a mesma. □

Afirmção 4:

$$\begin{aligned} d_\varepsilon \eta_\varepsilon(t)^2 f(\beta_\varepsilon(t), \Phi_\varepsilon^2(t, X(t))) &= \left\{ \eta_\varepsilon^2 \left[\frac{\partial f}{\partial t} \tau + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \tilde{\phi}^2 \right] + f 2\eta_\varepsilon \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right\} d\varepsilon \\ &\quad + \eta_\varepsilon^2 \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \tilde{\phi} dB(\varepsilon) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_\varepsilon \eta_\varepsilon(t) g(\beta_\varepsilon(t), \Phi_\varepsilon^2(t, X(t))) &= \left\{ \eta_\varepsilon \left[\frac{\partial g}{\partial t} \tau + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \cdot \tilde{\phi}^2 \right] + g \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right\} d\varepsilon \\ &\quad + \eta_\varepsilon \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \tilde{\phi} dB(\varepsilon). \end{aligned}$$

Demonstração: Para a primeira igualdade, tome $U(\varepsilon) = \eta_\varepsilon(t)^2$, cujo diferencial é $dU(\varepsilon) = 2\eta_\varepsilon \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial \varepsilon} d\varepsilon$, e $V(\varepsilon) = f(\beta_\varepsilon(t), \Phi_\varepsilon^2(t, X(t)))$, cujo diferencial foi calculado no Lema ???. Em seguida, aplique a fórmula da diferenciação do produto (Corolário 1.1.6) para U e V . A segunda igualdade segue da mesma maneira, tomando $U(\varepsilon) = \eta_\varepsilon(t)$ e $V(\varepsilon) = g(\beta_\varepsilon(t), \Phi_\varepsilon^2(t, X(t)))$. \square

As afirmações acima fornecem o diferencial, com relação à ε , de todos os termos das equações (3.1.20) e (3.1.21). Com isso, igualando as partes estocásticas e determinísticas, obtemos as quatro igualdades abaixo.

$$\begin{aligned} &\eta_\varepsilon^2 \left[\frac{\partial f}{\partial t} \tau + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \tilde{\phi}^2 \right] + f 2\eta_\varepsilon \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t}(t, X(t)) \\ &\quad + \frac{\partial \phi}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x}(t, X(t)) \cdot f(t, X(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x}(t, X(t))^2 \cdot g(t, X(t))^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2}(t, X(t)) \cdot g(t, X(t))^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_\varepsilon^2 \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \tilde{\phi} &= \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(t, \Phi_\varepsilon^2(t, X(t))) \cdot \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t}(t, X(t)) \\
&+ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x}(t, X(t)) \cdot f(t, X(t)) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x}(t, X(t))^2 \cdot g(t, X(t))^2 \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2}(t, X(t)) \cdot g(t, X(t))^2, \\
\eta_\varepsilon \left[\frac{\partial g}{\partial t} \tau + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \cdot \tilde{\phi}^2 \right] + g \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \\
&= \frac{\partial \phi}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x}(t, X(t)) \cdot g(t, X(t)) \\
\eta_\varepsilon \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \tilde{\phi} &= \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(\Phi_\varepsilon(t, X(t))) \cdot \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x}(t, X(t)) \cdot g(t, X(t)).
\end{aligned}$$

O próximo passo é fazer $\varepsilon = 0$ nas igualdades acima. Lembramos que a ação do fluxo é dada por (3.1.13), (3.1.14) e (3.1.15). Os termos envolvendo η_ε e Φ_ε^1 são os mesmos presentes no Teorema 2.2.2, e já foram calculados. Precisamos calcular os termos envolvendo Φ_ε^2 . Usando a equação (3.1.14), obtemos que

$$\left. \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial x} \right|_{\varepsilon=0} = 1, \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial \Phi_\varepsilon^2}{\partial t} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon^2}{\partial x^2} \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Portanto, fazendo $\varepsilon = 0$ nas quatro igualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned}
1 \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial t} \tau + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \tilde{\phi}^2 \right] + f \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial t} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot 1 + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot 0 \\
&+ \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot 1 \cdot f(t, X(t)) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot 1^2 \cdot g(t, X(t))^2 \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot 0 \cdot g(t, X(t))^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \tilde{\phi} &= \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \cdot 1 + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \cdot 0 \\
&+ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \cdot 1 \cdot f \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} \cdot 1^2 \cdot g(t, X(t))^2 \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \cdot 0 \cdot g(t, X(t))^2, \\
1 \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial t} \tau + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \cdot \tilde{\phi}^2 \right] &+ g \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot 1 \cdot g(t, X(t)), \\
1 \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \tilde{\phi} &= \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \cdot 1 \cdot g(t, X(t)).
\end{aligned}$$

Isso conclui a prova do teorema. □

Teorema 3.1.6 *Se um campo de vetores estocástico em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*

$$\mathbf{X} = \left[\tau(t) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \right]^D + \left[\tilde{\phi}(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \right]^S,$$

é uma simetria da EDE (em \mathbb{R}^n)

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t),$$

então, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f^i}{\partial t} \tau + \frac{\partial \tau}{\partial t} f^i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \phi^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k} (\tilde{\phi} \tilde{\phi}^T)_{jk} &= \frac{\partial \phi^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j} f^j \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x^j \partial x^k} (g g^T)_{jk} \\
\sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \tilde{\phi}^{jl} &= \frac{\partial \tilde{\phi}^{il}}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{\phi}^{il}}{\partial x^j} f^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{\phi}^{il}}{\partial x^j \partial x^k} (g g^T)_{jk}, \quad 1 \leq l \leq m \\
\frac{\partial g^{il}}{\partial t} \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial t} g^{il} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g^{il}}{\partial x^j} \phi^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 g^{il}}{\partial x^j \partial x^k} (\tilde{\phi} \tilde{\phi}^T)_{jk} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j} g^{jl}, \quad 1 \leq l \leq m \\
\sum_{j=1}^n \frac{\partial g^{il}}{\partial x^j} \tilde{\phi}^{j\alpha} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{\phi}^{i\alpha}}{\partial x^j} g^{jl}, \quad 1 \leq l, \alpha \leq m.
\end{aligned}$$

Demonstração: Para cada $1 \leq i \leq n$, as equações (3.1.20) e (3.1.21) ficam

$$f^i(\Phi_\varepsilon(t, X(t)))\eta_\varepsilon(t)^2 = \frac{\partial(\Phi_\varepsilon^2)^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\Phi_\varepsilon^2)^i}{\partial x^j} f^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2(\Phi_\varepsilon^2)^i}{\partial x^j \partial x^k} (gg^T)_{jk} \quad (3.1.22)$$

$$g^{il}(\Phi_\varepsilon(t, X(t)))\eta_\varepsilon(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\Phi_\varepsilon^2)^i}{\partial x^j} g^{jl}, \quad 1 \leq l \leq m. \quad (3.1.23)$$

De maneira análoga ao caso $n = m = 1$, calculamos o diferencial das equações (3.1.22) e (3.1.23) com relação à ε , e fazemos $\varepsilon = 0$, usando a equação da ação do fluxo, que na variável espacial agora é dada por

$$x^i \longmapsto (\Phi_\varepsilon^2)^i(t, x) = x^i + \int_0^\varepsilon \phi^i(\Phi_r(t, x)) dr + \sum_{j=1}^n \int_0^\varepsilon \tilde{\phi}^{ij}(\Phi_r(t, x)) dB^j(r).$$

□

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.7 Um exemplo simples, é a equação do movimento Browniano em \mathbb{R} :

$$dX(t) = dB(t). \quad (3.1.24)$$

Aqui, as equações de Lie para simetrias usuais (3.1.3), ficam (veja Exemplo 2.2.4, p. 25)

$$\begin{aligned} 0 &= \phi_t + \frac{1}{2} \phi_{xx} \\ \frac{1}{2} \tau_t &= \phi_x, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} \tau(t) &= 2c_1 t + c_3 \\ \phi(t, x) &= c_1 x + c_2, \end{aligned}$$

que gera as seguintes simetrias

$$\mathbf{X}_1 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{X}_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{X}_3 = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (3.1.25)$$

Já as equações de Lie para simetrias estocásticas, equações (3.1.12), ficam

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ 0 &= \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial t} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} \tau(t) &= 2c_1 t + c_3 \\ \phi(t, x) &= c_1 x + c_2 \\ \tilde{\phi}(t, x) &= c_4. \end{aligned}$$

Essa solução gera os mesmos campos de vetores de (3.1.25)

$$\mathbf{X}_1 = \left[2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} \right]^D, \quad \mathbf{X}_2 = \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^D, \quad \mathbf{X}_3 = \left[\frac{\partial}{\partial t} \right]^D \quad (3.1.26)$$

e um campo adicional

$$\mathbf{X}_4 = \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^S. \quad (3.1.27)$$

Então, no caso do movimento Browniano, as simetrias estocásticas fornecem um novo campo de vetores de simetria, ou seja, \mathbf{X}_4 , que é um campo com parte determinística nula.

Vimos no Exemplo 2.2.4 que as ações que os geradores \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 e \mathbf{X}_3 produzem são

$$\begin{array}{lll} G_1 : & t \mapsto e^{2\varepsilon} t & G_2 : & t \mapsto t & G_3 : & t \mapsto t + \varepsilon \\ & x \mapsto e^\varepsilon x & & x \mapsto x + \varepsilon & & x \mapsto x. \end{array}$$

Já o novo gerador infinitesimal \mathbf{X}_4 , produz a ação

$$\begin{aligned} G_4 : & t \mapsto t \\ & x \mapsto x + B(\varepsilon). \end{aligned}$$

Note que G_4 também corresponde à uma translação no espaço, assim como G_2 . Porém, a translação dada por G_4 é aleatória, uma vez que o movimento Browniano depende de $\omega \in \Omega$. Esta simetria significa que, se $B = B(t, \omega)$ é um movimento Browniano, então $\bar{B}(t, \omega) = B(t, \omega) + B(c, \omega)$, onde $c > 0$, satisfaz a mesma equação que B , ou seja,

$$dX(t) = dB(t).$$

Note que, assim como aconteceu com as ações dadas pelas simetrias clássicas, essa ação estocástica também leva movimento Browniano em movimento Browniano, embora já vimos que isso não é uma característica das simetrias (veja Observação 2.2.5, p. 26).

Exemplo 3.1.8 Considere a equação de Langevin em \mathbb{R} :

$$dX(t) = aX(t)dt + b dB(t). \quad (3.1.28)$$

As equações de Lie (3.1.3) fornecem as simetrias (veja Exemplo 2.2.6, p. 27)

$$\mathbf{X}_1 = e^{at} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{X}_2 = \frac{e^{2at}}{a} \frac{\partial}{\partial t} + e^{2at} x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{X}_3 = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (3.1.29)$$

Por outro lado, as equações de Lie (3.1.12) fornecem as simetrias estocásticas

$$\mathbf{X}_1 = \left[e^{at} \frac{\partial}{\partial x} \right]^D, \quad \mathbf{X}_2 = \left[\frac{e^{2at}}{a} \frac{\partial}{\partial t} + e^{2at} x \frac{\partial}{\partial x} \right]^D, \quad \mathbf{X}_3 = \left[\frac{\partial}{\partial t} \right]^D \quad (3.1.30)$$

e também

$$\mathbf{X}_4 = \left[e^{at} \frac{\partial}{\partial x} \right]^S. \quad (3.1.31)$$

Novamente, as simetrias estocásticas forneceram um novo campo de vetores de simetrias, com parte determinística nula. Entretanto, isso não acontece sempre. É o que ilustra o próximo exemplo. Antes disso, note que a ação que o campo \mathbf{X}_4 gera é

$$\begin{aligned} G_4 : \quad t &\longmapsto t \\ x &\longmapsto x + e^{at} B(\varepsilon). \end{aligned}$$

Os fluxos associados aos campos \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 e \mathbf{X}_3 são dados no Exemplo 2.2.6.

Exemplo 3.1.9 Considere a seguinte equação em \mathbb{R} :

$$dX(t) = \frac{a}{X(t)} dt + dB(t). \quad (3.1.32)$$

As simetrias de (3.1.32) são

$$\mathbf{X}_1 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{X}_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.1.33)$$

e as simetrias estocásticas são exatamente as mesmas, isto é,

$$\mathbf{X}_1 = \left[2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} \right]^D, \quad \mathbf{X}_2 = \left[\frac{\partial}{\partial t} \right]^D. \quad (3.1.34)$$

As ações geradas por tais campos já foram calculadas na equação do movimento Browniano, Exemplo 3.1.7.

Para finalizar, vamos calcular as simetrias da equação do movimento Browniano geométrico.

Exemplo 3.1.10

$$dX(t) = aX(t)dt + bX(t)dB(t).$$

Os geradores infinitesimais de simetrias estocásticas dessa equação são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \left[x \frac{\partial}{\partial x} \right]^D, \quad \mathbf{X}_2 = \left[\left(\frac{4t}{2b-a^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \left(tx + \frac{2x \ln x}{2b-a^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right]^D, \\ \mathbf{X}_3 &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \right]^D \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_4 = \left[x \frac{\partial}{\partial x} \right]^S. \end{aligned}$$

sendo que $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ e \mathbf{X}_3 são suas simetrias clássicas. Os fluxos associados são

$$\begin{aligned} G_1 : \quad t &\longmapsto t & G_2 : \quad t &\longmapsto te^{\frac{4\varepsilon}{2b-a^2}} \\ x &\longmapsto e^\varepsilon x & x &\longmapsto \exp \left(e^{\frac{2\varepsilon}{2b-a^2}} \ln x + \frac{t(2b-a^2)}{2} \left(\frac{4\varepsilon}{2b-a^2} - \frac{2\varepsilon}{2b-a^2} \right) \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G_3 : \quad t &\longmapsto t + \varepsilon \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Além disso, o fluxo associado à \mathbf{X}_4 é

$$\begin{aligned} G_4 : \quad t &\longmapsto t \\ x &\longmapsto xe^{B(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}}. \end{aligned}$$

3.2 Coordenadas canônicas

Uma maneira de simplificar uma equação diferencial, utilizando suas simetrias, é de obter coordenadas canônicas. Trata-se de um sistema de coordenadas que simplifica a ação dada pelo fluxo associado à simetria.

3.2.1 Caso 1: Simetrias clássicas

Considere a seguinte EDE:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t).$$

Suponha que o campo de vetores $\mathbf{X} = \tau(t, x)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x)\frac{\partial}{\partial x}$, com fluxo associado $\Phi_\varepsilon(t, x) = (t, x) + \int_0^\varepsilon (\tau(\Phi_r(t, x)), \phi(\Phi_r(t, x)))dr$, seja uma simetria da EDE. Através de uma mudança de variáveis

$$\begin{aligned} t &\longmapsto s = s(t, x) \\ x &\longmapsto y = y(t, x), \end{aligned}$$

o campo de vetores \mathbf{X} é levado no campo

$$\hat{\mathbf{X}} = \left[\tau(t, x)\frac{\partial s}{\partial t}(t, x) + \phi(t, x)\frac{\partial s}{\partial x}(t, x) \right] \frac{\partial}{\partial s} + \left[\tau(t, x)\frac{\partial y}{\partial t}(t, x) + \phi(t, x)\frac{\partial y}{\partial x}(t, x) \right] \frac{\partial}{\partial y}.$$

Quando $\hat{\mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial y}$, o sistema de coordenadas (s, y) é chamado de coordenada canônica para o campo \mathbf{X} . Isso significa que, nas novas variáveis (s, y) , a ação do fluxo associado à $\hat{\mathbf{X}}$ é dada por uma simples translação espacial, ou seja,

$$\begin{aligned} s &\longmapsto s \\ y &\longmapsto y + \varepsilon. \end{aligned}$$

Vejamos como isso ajuda a resolver uma EDE.

Exemplo 3.2.1 Considere, novamente, a equação de Langevin,

$$dX(t) = aX(t)dt + bdB(t).$$

Um dos geradores infinitesimais de suas simetrias (ver Exemplo 3.1.8) é dado por $\mathbf{X} = e^{at} \frac{\partial}{\partial t}$. De acordo com o que falamos acima, uma mudança de variáveis $t = s(t, x)$ e $x = y(t, x)$ gera uma coordenada canônica, se

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(t, x) \frac{\partial s}{\partial t}(t, x) + \phi(t, x) \frac{\partial s}{\partial x}(t, x) = e^{at} \frac{\partial s}{\partial x}(t, x) \\ 1 &= \tau(t, x) \frac{\partial y}{\partial t}(t, x) + \phi(t, x) \frac{\partial y}{\partial x}(t, x) = e^{at} \frac{\partial y}{\partial x}(t, x), \end{aligned}$$

isto é, se

$$s(t, x) = \alpha(t) \quad \text{e} \quad y(t, x) = e^{-at}x + \beta(t),$$

onde α e β são funções arbitrárias. Escolhendo $\alpha(t) = t$ e $\beta = 0$, obtemos a transformação

$$\begin{aligned} t &\longmapsto \bar{t} = t \\ x &\longmapsto \bar{x} = e^{-at}x. \end{aligned}$$

Pela fórmula de Itô, segue que

$$\begin{aligned} d\bar{X}(\bar{t}) &= -ae^{-at}X(t)dt + e^{-at}[aX(t)dt + bdB(t)] \\ &= be^{-at}dB(t) \\ &= be^{-a\bar{t}}d\bar{B}(\bar{t}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{X}(\bar{t}) = \bar{X}(0) + \int_0^{\bar{t}} be^{-a\theta}d\bar{B}(\theta).$$

Portanto,

$$e^{-at}X(t) = X(0) + \int_0^t be^{-a\theta}dB(\theta),$$

donde segue que

$$X(t) = e^{at}X(0) + be^{at} \int_0^t e^{-a\theta}dB(\theta).$$

Exemplo 3.2.2 A equação do movimento Browniano geométrico (Exemplo 3.1.10)

$$dX(t) = aX(t)dt + bX(t)dB(t)$$

admite $\mathbf{X} = x \frac{\partial}{\partial x}$ como um dos geradores de suas simetrias. Com esse campo, encontramos que

$$\begin{aligned} t &\longmapsto \bar{t} = t \\ x &\longmapsto \bar{x} = \ln x \end{aligned}$$

gera uma coordenada canônica. Pela fórmula de Itô, temos

$$d\bar{X}(t) = \left(a - \frac{b^2}{2}\right) dt + b dB(t).$$

Logo,

$$\ln X(t) = \bar{X}(t) = \bar{X}(0) + \left(a - \frac{b^2}{2}\right) t + bB(t),$$

e portanto,

$$X(t) = X(0) e^{\left(a - \frac{b^2}{2}\right)t + bB(t)}.$$

Observação 3.2.3 A teoria de Doss–Sussmann (ver [4], Seção 3.2), permite resolver EDEs autônomas, no sentido de Stratonovich.

Dada uma EDE autônoma

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dB(t), \quad (3.2.1)$$

sua versão equivalente, no sentido de Stratonovich, é

$$dX(t) = F(X(t))dt + g(X(t)) \circ dB(t), \quad F = f - \frac{1}{2}gg^T, \quad (3.2.2)$$

onde $\circ dB(t)$ representa a integração estocástica de Stratonovich. Segundo a teoria de Doss–Sussmann, a solução de (3.2.2) (e, conseqüentemente, de (3.2.1)) é dada por

$$X(t) = \xi_{B(t)}(Z(t)),$$

onde ξ é o fluxo

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_t(z) &= g(\xi_t(z)) \\ \xi_0(z) &= z. \end{aligned}$$

e $Z = Z(t, \omega)$ é solução de uma equação aleatória (ou seja, com coeficientes dependendo de $\omega \in \Omega$) dada por

$$\dot{Z}(t, \omega) = H(B(t, \omega), Z(t, \omega)), \quad \text{onde} \quad H(t, z) = \frac{F(\xi(t, z))}{\frac{\partial \xi_t}{\partial z}(z)}.$$

Aparentemente, essa metodologia para encontrar uma solução de uma EDE está bem próxima da metodologia das simetrias de Lie. Entretanto, conseguimos verificar que, no caso de simetrias pontuais (que é o tipo de simetrias utilizada nesta tese), não é possível obter o método de Doss–Sussmann. Podemos comprovar isso através da seguinte EDE:

$$dX(t) = X(t)^2 dt + dB(t). \quad (3.2.3)$$

Aqui, as equações de Lie (3.1.12) ficam

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} x^2 + 2x\phi + \tilde{\phi}^2 = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (3.2.4)$$

$$2x\tilde{\phi} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} \quad (3.2.5)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.2.6)$$

$$0 = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}. \quad (3.2.7)$$

As equações (3.2.5) e (3.2.7) implicam que $\tilde{\phi}(t, x) = 0$. Por outro lado, obtemos das equações (3.2.4) e (3.2.6) que $\phi(t, x) = 0$ e $\tau(t) = c_1$. Portanto, a EDE (3.2.3) admite um único gerador infinitesimal de simetria, que é dado por $\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial t}$, cuja ação é uma translação no tempo. Tal simetria permite transformar uma equação não-autônoma em uma autônoma. Como a EDE (3.2.3) já é autônoma, tal simetria não fornece nada de novo. Por outro lado, aplicando o método de Doss–Sussmann, vemos que a solução de (3.2.3) é dada por

$$X(t) = \xi_{B(t)}(Z(t)) = B(t) + Z(t),$$

onde $Z = Z(t, \omega)$ é solução da equação aleatória

$$\dot{Z}(t, \omega) = (B(t, \omega) + Z(t, \omega))^2.$$

Isso significa que o método de Doss–Sussmann permite resolver (3.2.3), enquanto que a teoria das simetrias (pontuais) não.

3.2.2 Caso 2: Simetrias estocásticas

Nesta subseção, procuramos estender o conceito de coordenadas canônicas, para o caso de simetrias estocásticas.

Dado um campo de vetores estocástico

$$\mathbf{X} = \left[\tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \right]^D + \left[\tilde{\tau}(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\phi}(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \right]^S,$$

seu fluxo associado, Φ_ε , age da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} t &\longmapsto \Phi_\varepsilon^1(t, x) = t + \int_0^\varepsilon \tau \circ \Phi_r(t, x) dr + \int_0^\varepsilon \tilde{\tau} \circ \Phi_r(t, x) dB(r) \\ x &\longmapsto \Phi_\varepsilon^2(t, x) = x + \int_0^\varepsilon \phi \circ \Phi_r(t, x) dr + \int_0^\varepsilon \tilde{\phi} \circ \Phi_r(t, x) dB(r). \end{aligned}$$

Considere uma mudança de variáveis

$$u : (t, x) \longmapsto (s, y), \quad u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x)).$$

Tal mudança de coordenadas leva o fluxo Φ_ε , que age no espaço das variáveis (t, x) , em um fluxo que age no espaço das variáveis (s, y) , que denotamos por $\hat{\Phi}_\varepsilon$. No caso das simetrias clássicas, procuramos por uma aplicação u tal que a ação do fluxo $\hat{\Phi}_\varepsilon$ seja dada por

$$\begin{aligned} s &\longmapsto s \\ y &\longmapsto y + \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\hat{\Phi}_\varepsilon(s, y) = (s, y + \varepsilon).$$

No caso de simetrias estocásticas, procuramos, a princípio, uma mudança de coordenadas u tal que

$$\hat{\Phi}_\varepsilon(s, y) = (s, y + c\varepsilon + \tilde{c}B(\varepsilon)),$$

onde c e \tilde{c} são constantes. Sabemos que a ação do fluxo $\hat{\Phi}_\varepsilon$ é dada por

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_\varepsilon(s, y) &= u \circ \Phi_\varepsilon \circ u^{-1}(s, y) \\ &= u \left(u_1^{-1}(s, y) + \int_0^\varepsilon \tau \circ \Phi_r \circ u^{-1}(s, y) dr + \int_0^\varepsilon \tilde{\tau} \circ \Phi_r \circ u^{-1}(s, y) dB(r), \right. \\ &\quad \left. u_2^{-1}(s, y) + \int_0^\varepsilon \phi \circ \Phi_r \circ u^{-1}(s, y) dr + \int_0^\varepsilon \tilde{\phi} \circ \Phi_r \circ u^{-1}(s, y) dB(r) \right).\end{aligned}$$

Logo, calculando o diferencial de $\hat{\Phi}_\varepsilon$, e utilizando estas duas últimas igualdades, obtemos

$$\begin{aligned}(0, c d\varepsilon + \tilde{c} dB(\varepsilon)) &= \frac{\partial u}{\partial t} [\tau_\varepsilon(s, y) d\varepsilon + \tilde{\tau}_\varepsilon(s, y) dB(\varepsilon)] + \frac{\partial u}{\partial x} [\phi_\varepsilon(s, y) d\varepsilon + \tilde{\phi}_\varepsilon(s, y) dB(\varepsilon)] \\ &\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \tilde{\tau}_\varepsilon(s, y) \tilde{\phi}_\varepsilon(s, y) d\varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tilde{\tau}_\varepsilon(s, y)^2 d\varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tilde{\phi}_\varepsilon(s, y)^2 d\varepsilon \\ &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \tau_\varepsilon(s, y) + \frac{\partial u}{\partial x} \phi_\varepsilon(s, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \tilde{\tau}_\varepsilon(s, y) \tilde{\phi}_\varepsilon(s, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tilde{\tau}_\varepsilon(s, y)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tilde{\phi}_\varepsilon(s, y)^2 \right\} d\varepsilon + \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \tilde{\tau}_\varepsilon(s, y) + \frac{\partial u}{\partial x} \tilde{\phi}_\varepsilon(s, y) \right\} dB(\varepsilon),\end{aligned}$$

onde $\tau_\varepsilon = \tau \circ \Phi_\varepsilon \circ u^{-1}$, $\tilde{\tau}_\varepsilon = \tilde{\tau} \circ \Phi_\varepsilon \circ u^{-1}$, $\phi_\varepsilon = \phi \circ \Phi_\varepsilon \circ u^{-1}$ e $\tilde{\phi}_\varepsilon = \tilde{\phi} \circ \Phi_\varepsilon \circ u^{-1}$. Comparando as partes estocásticas e as determinísticas, isso implica que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} \tau_\varepsilon(s, y) + \frac{\partial u_1}{\partial x} \phi_\varepsilon(s, y) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x} \tilde{\tau}_\varepsilon(s, y) \tilde{\phi}_\varepsilon(s, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \tilde{\tau}_\varepsilon(s, y)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \tilde{\phi}_\varepsilon(s, y)^2 &= 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} \tau_\varepsilon(s, y) + \frac{\partial u_2}{\partial x} \phi_\varepsilon(s, y) + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x} \tilde{\tau}_\varepsilon(s, y) \tilde{\phi}_\varepsilon(s, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \tilde{\tau}_\varepsilon(s, y)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \tilde{\phi}_\varepsilon(s, y)^2 &= c \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} \tilde{\tau}_\varepsilon(s, y) + \frac{\partial u_1}{\partial x} \tilde{\phi}_\varepsilon(s, y) &= 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} \tilde{\tau}_\varepsilon(s, y) + \frac{\partial u_2}{\partial x} \tilde{\phi}_\varepsilon(s, y) &= \tilde{c}.\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon = 0$, segue que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \tau + \frac{\partial u_1}{\partial x} \phi + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x} \tilde{\tau} \tilde{\phi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \tilde{\tau}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \tilde{\phi}^2 \right) \circ u^{-1}(s, y) &= 0 \\ \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \tau + \frac{\partial u_2}{\partial x} \phi + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x} \tilde{\tau} \tilde{\phi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \tilde{\tau}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \tilde{\phi}^2 \right) \circ u^{-1}(s, y) &= c \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \tilde{\tau} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \tilde{\phi} \right) \circ u^{-1}(s, y) &= 0 \\ \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \tilde{\tau} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \tilde{\phi} \right) \circ u^{-1}(s, y) &= \tilde{c}. \end{aligned}$$

Isso implica que, para todo (t, x) ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} \tau + \frac{\partial u_1}{\partial x} \phi + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x} \tilde{\tau} \tilde{\phi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \tilde{\tau}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \tilde{\phi}^2 &= 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} \tau + \frac{\partial u_2}{\partial x} \phi + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x} \tilde{\tau} \tilde{\phi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \tilde{\tau}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \tilde{\phi}^2 &= c \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} \tilde{\tau} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \tilde{\phi} &= 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} \tilde{\tau} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \tilde{\phi} &= \tilde{c}. \end{aligned}$$

Na notação anterior, temos que uma mudança de variáveis $(t, x) = (s(t, x), y(t, x))$

gera uma coordenada canônica se, para todo (t, x) ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} \tau + \frac{\partial s}{\partial x} \phi + \frac{\partial^2 s}{\partial t \partial x} \tilde{\tau} \tilde{\phi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \tilde{\tau}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \tilde{\phi}^2 &= 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t} \tau + \frac{\partial y}{\partial x} \phi + \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \tilde{\tau} \tilde{\phi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tilde{\tau}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tilde{\phi}^2 &= c \\ \frac{\partial s}{\partial t} \tilde{\tau} + \frac{\partial s}{\partial x} \tilde{\phi} &= 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t} \tilde{\tau} + \frac{\partial y}{\partial x} \tilde{\phi} &= \tilde{c}. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Observação 3.2.4 Fazendo $\tilde{\tau} = 0 = \tilde{\phi}$, $\tilde{c} = 0$ e $c = 1$ em (3.2.8), obtemos o caso clássico, ou seja, quando uma mudança de variáveis gera uma coordenada canônica, no caso de simetrias determinísticas. O sistema resultante é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} \tau + \frac{\partial s}{\partial x} \phi &= 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t} \tau + \frac{\partial y}{\partial x} \phi &= 1. \end{aligned}$$

Exemplo 3.2.5 A equação de Langevin

$$dX(t) = aX(t)dt + b dB(t)$$

admite as simetrias (ver Exemplo 3.1.8, p. 47):

$$\mathbf{X}_1 = \left[e^{at} \frac{\partial}{\partial x} \right]^D, \quad \mathbf{X}_2 = \left[\frac{e^{2at}}{a} \frac{\partial}{\partial t} + e^{2at} x \frac{\partial}{\partial x} \right]^D, \quad \mathbf{X}_3 = \left[\frac{\partial}{\partial t} \right]^D, \quad \mathbf{X}_4 = \left[e^{at} \frac{\partial}{\partial x} \right]^S.$$

No Exemplo 3.2.1, vimos que para o campo \mathbf{X}_1 , uma coordenada canônica é $s(t, x) = t$ e $y(t, x) = e^{-at}x$, que nos permitiu obter uma solução explícita da equação de Langevin. Por outro lado, utilizando o campo estocástico \mathbf{X}_4 , e as condições (3.2.8), conseguimos obter a mesma mudança de variáveis $s(t, x) = t$ e $y(t, x) = e^{-at}x$, desde que $c = 1$ e $\tilde{c} = 0$. Nesse caso, uma coordenada canônica é um sistema de coordenadas onde o fluxo é dado por $\hat{\Phi}_\varepsilon(s, y) = (s, y + \varepsilon)$.

Exemplo 3.2.6 A equação do movimento Browniano geométrico

$$dX(t) = aX(t)dt + bX(t)dB(t)$$

admite as simetrias (ver Exemplo 3.1.10, p. 48):

$$\mathbf{X}_1 = \left[x \frac{\partial}{\partial x} \right]^D, \quad \mathbf{X}_2 = \left[\left(\frac{4t}{2b - a^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \left(tx + \frac{2x \ln x}{2b - a^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right]^D, \\ \mathbf{X}_3 = \left[\frac{\partial}{\partial t} \right]^D \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_4 = \left[x \frac{\partial}{\partial x} \right]^S.$$

No Exemplo 3.2.2, vimos que para o campo \mathbf{X}_1 , uma coordenada canônica é $s(t, x) = t$ e $y(t, x) = \ln x$, que nos permitiu obter uma solução explícita da equação do movimento Browniano geométrico. Por outro lado, utilizando o campo estocástico \mathbf{X}_4 , e as condições (3.2.8), conseguimos obter a mesma mudança de variáveis $s(t, x) = t$ e $y(t, x) = \ln x$, desde que $c = -\frac{1}{2}$ e $\tilde{c} = 1$. Nesse caso, uma coordenada canônica é um sistema de coordenadas onde o fluxo é dado por $\hat{\Phi}_\varepsilon(s, y) = (s, y - \frac{\varepsilon}{2} + B(\varepsilon))$.

Através dos exemplos acima, vemos que uma possível definição de coordenada canônica, no caso de simetrias estocásticas, é a seguinte:

Definição 3.2.7 *Seja $\mathbf{X} = [\tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x}]^D + [\tilde{\tau}(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\phi}(t, x) \frac{\partial}{\partial x}]^S$ um campo de vetores no espaço das variáveis (t, x) , com fluxo associado Φ_ε . Considere uma mudança de variáveis $u : (t, x) \mapsto (s, y)$. Denote por $\hat{\Phi}_\varepsilon$ o fluxo Φ_ε , nas novas variáveis (s, y) . Dizemos que o sistema de coordenadas (s, y) é uma coordenada canônica quando*

$$\hat{\Phi}_\varepsilon(s, y) = (s, y + c\varepsilon + \tilde{c}B(\varepsilon)),$$

para alguma escolha de constantes c e \tilde{c} .

Com isso, obtemos o seguinte teorema ao longo desta seção:

Teorema 3.2.8 *Uma mudança de variáveis $u(t, x) = (s(t, x), y(t, x))$ gera uma coordenada canônica, se existem constantes c e \tilde{c} tais que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} \tau + \frac{\partial s}{\partial x} \phi + \frac{\partial^2 s}{\partial t \partial x} \tilde{\tau} \tilde{\phi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \tilde{\tau}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \tilde{\phi}^2 &= 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t} \tau + \frac{\partial y}{\partial x} \phi + \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \tilde{\tau} \tilde{\phi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tilde{\tau}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tilde{\phi}^2 &= c \\ \frac{\partial s}{\partial t} \tilde{\tau} + \frac{\partial s}{\partial x} \tilde{\phi} &= 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t} \tilde{\tau} + \frac{\partial y}{\partial x} \tilde{\phi} &= \tilde{c}. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

E, para o caso \mathbb{R}^n , temos

Teorema 3.2.9 *Dado um campo de vetores estocástico*

$$\mathbf{X} = \left[\tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \right]^D + \left[\tilde{\phi}(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \right]^S,$$

uma mudança de variáveis $u(t, x) = (s(t, x), y(t, x))$ gera uma coordenada canônica, se

existem constantes $c \in \mathbb{R}^n$ e $\tilde{c} \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ tais que, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} \tau + \sum_{j=1}^n \frac{\partial s}{\partial x^j} \phi^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 s}{\partial x^j \partial x^k} (\tilde{\phi} \tilde{\phi}^T)_{jk} &= 0, \\ \frac{\partial y^i}{\partial t} \tau + \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \phi^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k} (\tilde{\phi} \tilde{\phi}^T)_{jk} &= c^i, \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial s}{\partial x^j} \tilde{\phi}^{jl} &= 0, \quad 1 \leq l \leq m, \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \tilde{\phi}^{jl} &= \tilde{c}^{il}, \quad 1 \leq l \leq m. \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

3.3 Transformações entre equações estocásticas

Na seção 2.3, vimos como funciona a teoria de G. Bluman et al. ([3]) no caso clássico. Em se tratando de EDOs, uma condição necessária para se obter uma transformação $\mu = \mu(t, x)$ que leve uma equação

$$dX(t) = f(t, X(t))dt,$$

com simetrias geradas por $\mathbf{X} = \tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x}$, em uma equação

$$dY(s) = h(s, Y(s))ds,$$

com simetrias $\mathbf{Y} = \rho(s, y) \frac{\partial}{\partial s} + \psi(s, y) \frac{\partial}{\partial y}$ é

$$\begin{aligned} \rho \circ \mu &= \frac{\partial \mu^1}{\partial t} \tau + \frac{\partial \mu^1}{\partial x} \phi \\ \psi \circ \mu &= \frac{\partial \mu^2}{\partial t} \tau + \frac{\partial \mu^2}{\partial x} \phi. \end{aligned}$$

Nesta seção, vamos mostrar como estender esse resultado para EDOs estocásticas e para simetrias estocásticas. Note que para este fim, não precisamos exigir que $\tau = \tau(t)$ (ou que $\rho = \rho(t)$).

Considere as seguintes equações

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t), \tag{3.3.1}$$

$$dY(s) = h(s, Y(s))ds + \sigma(s, Y(s))d\tilde{B}(s), \quad (3.3.2)$$

onde \tilde{B} é o movimento Browniano B após uma mudança temporal (note que podemos ter $\tilde{B} = B$, que ocorre quando a mudança temporal é a identidade). Sejam $\mathbf{X} = \left[\tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \right]^D + \left[\tilde{\phi}(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \right]^S$ e $\mathbf{Y} = \left[\rho(s, y) \frac{\partial}{\partial s} + \psi(s, y) \frac{\partial}{\partial y} \right]^D + \left[\tilde{\psi}(s, y) \frac{\partial}{\partial y} \right]^S$ simetrias de (3.3.1) e (3.3.2), respectivamente.

Teorema 3.3.1 *Se uma aplicação $\mu = \mu(t, x)$ transforma a equação (3.3.1) na equação (3.3.2), então*

$$\begin{aligned} \rho \circ \mu &= \frac{\partial \mu_1}{\partial t} \tau + \frac{\partial \mu_1}{\partial x} \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x^2} \tilde{\phi}^2 \\ 0 &= \frac{\partial \mu_1}{\partial x} \tilde{\phi} \\ \psi \circ \mu &= \frac{\partial \mu_2}{\partial t} \tau + \frac{\partial \mu_2}{\partial x} \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial x^2} \tilde{\phi}^2 \\ \tilde{\psi} \circ \mu &= \frac{\partial \mu_2}{\partial x} \tilde{\phi}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Observação 3.3.2 As equações em (3.3.3) significam que, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} \rho \circ \mu &= \frac{\partial \mu_1}{\partial t} \tau + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mu_1}{\partial x^j} \phi^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x^j \partial x^k} (\tilde{\phi} \tilde{\phi}^T)_{jk} \\ 0 &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mu_1}{\partial x^j} \tilde{\phi}^{jl}, \quad 1 \leq l \leq m \\ \psi^i \circ \mu &= \frac{\partial \mu_2^i}{\partial t} \tau + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mu_2^i}{\partial x^j} \phi^j + \sum_{j,k=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mu_2^i}{\partial x^j \partial x^k} (\tilde{\phi} \tilde{\phi}^T)_{jk} \\ \tilde{\psi}^{il} \circ \mu &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mu_2^i}{\partial x^j} \tilde{\phi}^{jl}, \quad 1 \leq l \leq m. \end{aligned}$$

Demonstração: Suponha $n = m = 1$. Denote por $(t, x) \mapsto (\bar{t}, \bar{x})$ e por $(s, y) \mapsto (\hat{s}, \hat{y})$ as ações associadas aos campos \mathbf{X} e \mathbf{Y} , respectivamente. Como na seção 2.3, o diagrama

abaixo deve comutar.

$$\begin{array}{ccc} (t, x) & \xrightarrow{\mathbf{X}} & (\bar{t}, \bar{x}) \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ (s, y) & \xrightarrow{\mathbf{Y}} & (\hat{s}, \hat{y}). \end{array}$$

Isso significa que devemos ter, para todo (t, x) ,

$$(\mu_1(\bar{t}, \bar{x}), \mu_2(\bar{t}, \bar{x})) = (\widehat{\mu_1(t, x)}, \widehat{\mu_2(t, x)}). \quad (3.3.4)$$

Denotando o fluxo associado à \mathbf{X} por Φ_ε e por Ψ_ε o fluxo associado à \mathbf{Y} , reescrevemos a equação (3.3.4) como

$$(\mu_1(\Phi_\varepsilon^1(t, x), \Phi_\varepsilon^2(t, x)), \mu_2(\Phi_\varepsilon^1(t, x), \Phi_\varepsilon^2(t, x))) = (\Psi_\varepsilon^1(\mu(t, x)), \Psi_\varepsilon^2(\mu(t, x))), \quad (3.3.5)$$

de onde obtemos as igualdades

$$\begin{aligned} \Psi_\varepsilon^1(\mu(t, x)) &= \mu_1(\Phi_\varepsilon^1(t, x), \Phi_\varepsilon^2(t, x)) \\ \Psi_\varepsilon^2(\mu(t, x)) &= \mu_2(\Phi_\varepsilon^1(t, x), \Phi_\varepsilon^2(t, x)). \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Calculando o diferencial das equações (3.3.6) com relação à ε , e comparando os termos estocásticos e determinísticos, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_\varepsilon^1}{\partial \varepsilon} \circ \mu &= \frac{\partial \mu_1}{\partial t} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mu_1}{\partial x} \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x^2} \tilde{\phi}^2 \\ 0 &= \frac{\partial \mu_1}{\partial x} \tilde{\phi} \\ \psi \circ \mu &= \frac{\partial \mu_2}{\partial t} \frac{\partial \Phi_\varepsilon^1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mu_2}{\partial x} \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial x^2} \tilde{\phi}^2 \\ \tilde{\psi} \circ \mu &= \frac{\partial \mu_2}{\partial x} \tilde{\phi}. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Para finalizar a demonstração, basta fazer $\varepsilon = 0$ em (3.3.7).

Para n e m quaisquer, basta tomar cuidado com a ação espacial, que é dada por

$$x^i \longmapsto \bar{x}^i = (\Phi_\varepsilon^2)^i(t, x) = x^i + \int_0^\varepsilon \phi^i(\Phi_r(t, x)) dr + \sum_{j=1}^n \int_0^\varepsilon \tilde{\phi}^{ij}(\Phi_r(t, x)) dB^j(r)$$

e

$$y^i \mapsto \bar{y}^i = (\Psi_\varepsilon^2)^i(s, y) = y^i + \int_0^\varepsilon \psi^i(\Psi_r(s, y)) dr + \sum_{j=1}^n \int_0^\varepsilon \tilde{\psi}^{ij}(\Psi_r(s, y)) dB^j(r).$$

A demonstração é análoga ao caso $n = m = 1$. \square

Exemplo 3.3.3 Dada uma EDE

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t),$$

e uma aplicação F de classe C^2 (a valores em \mathbb{R}), sabemos através da fórmula de Itô que

$$dF(t, X(t)) = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} g^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial x} g dB(t).$$

Logo, se F satisfaz a EDP

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} g^2 = 0,$$

segue que a aplicação $\mu(t, x) = (t, F(t, x))$ transforma a EDE

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t) \tag{3.3.8}$$

na EDE

$$dX(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, X(t))g(t, X(t))dB(t), \tag{3.3.9}$$

ou seja, uma tal aplicação remove o coeficiente do dt (conhecido como drift) de uma EDE. Segundo a teoria de G. Bluman et al., a aplicação μ leva cada gerador de simetria de (3.3.8), em um gerador de simetria de (3.3.9).

Exemplo 3.3.4 Considere a EDE (em \mathbb{R})

$$dX(t) = (aX(t) + b)dt + dB(t), \quad a \neq 0, \tag{3.3.10}$$

e a aplicação

$$\mu(t, x) = \left(-\frac{e^{-2at}}{2a}, e^{-at} \left(x + \frac{b}{a} \right) \right). \tag{3.3.11}$$

A ação de μ nas variáveis t e x é dada por

$$\begin{aligned} t \longmapsto \bar{t} &= \mu_1(t, x) = -\frac{e^{-2at}}{2a} \\ x \longmapsto \bar{x} &= \mu_2(t, x) = e^{-at} \left(x + \frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

Seja $X = X(t)$ uma solução de (3.3.10). Pela fórmula de Itô, temos que

$$\begin{aligned} d\bar{X}(t) &= \frac{\partial \mu_2}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial \mu_2}{\partial x}(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial x^2}(t, X(t))d\langle X \rangle(t) \\ &= e^{-at}dB(t), \end{aligned}$$

isto é,

$$\bar{X}(t) = \bar{X}(0) + \int_0^t e^{-as}dB(s).$$

Por outro lado, note que

$$\bar{t} = -\frac{e^{-2at}}{2a} = \int_0^t \eta(s)^2 ds,$$

onde $\eta(t) = e^{-at}$, se $t \neq 0$ e $\eta(0) = 0$. Logo, de acordo com o Teorema 1.2.1, temos que

$$\int_0^t e^{-as}dB(s) = \int_0^{\bar{t}} e^{-a\alpha(s)} \frac{1}{\eta(\alpha(s))} d\bar{B}(s) = \int_0^{\bar{t}} d\bar{B}(s),$$

o que mostra que

$$d\bar{X}(\bar{t}) = d\bar{B}(\bar{t}).$$

Portanto, a aplicação μ dada em (3.3.11) transforma a equação (3.3.10) na equação do movimento Browniano.

Tal aplicação foi utilizada por R. Kozlov, em [11], mas o autor não mostrou como ela foi obtida. Vejamos como podemos obter a transformação μ , usando o Teorema 3.3.1 acima.

As simetrias de (3.3.10) são geradas por

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{X}_2 = e^{2at} \frac{\partial}{\partial t} + (ax + b)e^{2at} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{X}_3 = e^{at} \frac{\partial}{\partial x},$$

e as simetrias de (3.1.25) por

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{Y}_2 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{Y}_3 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Os colchetes de tais campos são dados por

$$[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = 2a\mathbf{X}_2, \quad [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3] = a\mathbf{X}_3, \quad [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] = 0$$

e

$$[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2] = 2\mathbf{Y}_1, \quad [\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_3] = 0, \quad [\mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3] = \mathbf{Y}_3.$$

Primeiro, vamos ajustar os coeficientes. Substituindo \mathbf{X}_i por $\tilde{\mathbf{X}}_i = a_1^i \mathbf{X}_1 + a_2^i \mathbf{X}_2 + a_3^i \mathbf{X}_3$ e impondo que

$$[\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2] = 2\tilde{\mathbf{X}}_1, \quad [\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_3] = 0, \quad [\tilde{\mathbf{X}}_2, \tilde{\mathbf{X}}_3] = \tilde{\mathbf{X}}_3,$$

obtemos $a_2^1 = -1$, $a_1^2 = \frac{1}{a}$, $a_3^3 = 1$ e $a_j^i = 0$ para os demais índices $1 \leq i, j \leq 3$, o que significa que

$$\tilde{\mathbf{X}}_1 = -\mathbf{X}_2, \quad \tilde{\mathbf{X}}_2 = \frac{1}{a}\mathbf{X}_1, \quad \tilde{\mathbf{X}}_3 = \mathbf{X}_3.$$

Portanto, $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2$ e $\tilde{\mathbf{X}}_3$ geram a mesma álgebra de Lie que $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ e \mathbf{X}_3 , e possuem os mesmos coeficientes de $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$ e \mathbf{Y}_3 . Então, uma condição necessária para encontrar uma aplicação μ que leva (3.3.10) em (3.1.25), é que as condições (3.3.3) devem ser satisfeitas para cada par $\tilde{\mathbf{X}}_i, \mathbf{Y}_i$. Isso implica que μ deve satisfazer o sistema abaixo.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = -e^{2at} \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + (ax + b) e^{2at} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} \\ 0 = -e^{2at} \frac{\partial \mu_2}{\partial t} + (ax + b) e^{2at} \frac{\partial \mu_2}{\partial x} \\ 2\mu_1 = \frac{1}{a} \frac{\partial \mu_1}{\partial t} \\ \mu_2 = \frac{1}{a} \frac{\partial \mu_2}{\partial t} \\ 0 = e^{at} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} \\ 1 = e^{at} \frac{\partial \mu_2}{\partial x} \end{array} \right. \quad (3.3.12)$$

Resolvendo o sistema (3.3.12), encontramos a transformação μ dada em (3.3.11).

Referências

- [1] Albeverio, S. e Fei, S-M.: *A remark on symmetry of stochastic dynamical systems and their conserved quantities*. J. Phys. A **28**, n° 22, 6363–6371, 1995.
- [2] Bluman, G. W. e Anco, S. C.: *Symmetry and integration methods for differential equations*. Applied Mathematical Sciences **154**, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [3] Bluman, G. W., Cheviakov, A. F. e Anco, S. C.: *Applications of symmetry methods to partial differential equations*. Applied Mathematical Sciences, vol. 168, Springer, New York, 2010.
- [4] Bonder, J. F., Groisman, P. e Rossi, J. D.: *Continuity of the explosion time in stochastic differential equations*. Stoch. Anal. Appl. **27**, n° 5, 984–999, 2009.
- [5] Fredericks, E. e Mahomed, F. M.: *Symmetries of first-order stochastic ordinary differential equations revisited*. Math. Methods Appl. Sci. **30**, n° 16, 2013–2025, 2007.
- [6] Fredericks, E. e Mahomed, F. M.: *A formal approach for handling Lie point symmetries of scalar first-order Itô stochastic ordinary differential equations*. J. Nonlinear Math. Phys. **15**, suppl. 1, 44–59, 2008.
- [7] Gaeta, G.: *Lie-point symmetries and stochastic differential equations II*. J. Phys. A **33**, n° 27, 4883–4902, 2000.
- [8] Gaeta, G. e Quintero, N. R.: *Lie-point symmetries and differential equations*. J. Phys. A: Math. Gen. **32**, n° 48, 8425–8505, 1999.

-
- [9] Grigoriev, Y. N., Ibragimov, N. H., Kovalev, V. F. e Meleshko, S. V. *Symmetries of integro-differential equations. With applications in mechanics and plasma physics*. Lecture Notes in Physics 806. Springer, Dordrecht, 2010.
- [10] Ibragimov, N. H., Ünal, G. e Jogr  us, C. *Approximate symmetries and conservation laws for Itô and Stratonovich dynamical systems*. J. Math. Anal. Appl. **297**, n   1, 152–168, 2004.
- [11] Kozlov, R.: *The group classification of a scalar stochastic differential equation*. J. Phys. A: Math. Theor. **43**, n   5, 55202–55214, 2010.
- [12] Kozlov, R.: *Symmetries of systems of stochastic differential equations with diffusion matrices of full rank*. J. Phys. A **43**, n   24, 245201–245216, 2010.
- [13] Kozlov, R.: *On maximal Lie point symmetry groups admitted by scalar stochastic differential equations*. J. Phys. A **44**, n   20, 205202–205209, 2011.
- [14] Kozlov, R.: *On Lie group classification of a scalar stochastic differential equation*. J. Nonlinear Math. Phys. **18**, suppl. 1, 177–187, 2011.
- [15] Lie, S.: *  ber die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linearer partieller Differentialgleichungen*. Arch. Math. 6, 328–368, 1881; also Gesammelte Abhandlungen, Vol. III, pp. 492–523. B.G. Teubner, Leipzig, 1922.
- [16] Misawa, T.: *New conserved quantities derived from symmetry for stochastic dynamical systems*. J. Phys. A: Math. Gen. **27**, n   20, 777–782, 1994.
- [17] Oksendal, B.: *Stochastic differential equations. An introduction with applications*. Fifth edition, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [18] Oksendal, B.: *When is a stochastic integral a time change of a diffusion?* J. Theoret. Probab. **3**, n   2, 207–226, 1990.

-
- [19] Olver, P. J.: *Applications of Lie groups to differential equations*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 107, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [20] Protter, P. E.: *Stochastic integration and differential equations..* Second edition. Stochastic modeling and applied probability, 21. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [21] Srihirun, B., Meleshko, S. e Schulz, E.: *On the definition of an admitted Lie group for stochastic differential equations*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **12**, 1379–1389, 2006.
- [22] Stephani, H.: *Differential equations: their solution using symmetries*. Cambridge University Press, 1989.
- [23] Ünal, G.: *Symmetries of Itô and Stratonovich dynamical systems and their conserved quantities*. Nonlinear Dyn. **32**, 417–426, 2003.
- [24] Wafo Soh, C. e Mahomed, F. M.: *Integration of stochastic ordinary differential equations from a symmetry standpoint*. J. Phys. A: Math. Gen. **34**, n° 1, 177–192, 2001.